

PROGRAMA - GUÍA DOCENTE

Grao en Matemáticas

*TOPOLOXÍA DE SUPERFICIES*

*Prof. Xosé M. Masa Vázquez*

DEPARTAMENTO DE XEOMETRÍA E TOPOLOXÍA

Curso 2014-15

FACULTADE DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

## Datos descritivos da materia

CÓDIGO: G1011331
------------------

Materia **obligatoria** de terceiro curso do Grao en Matemáticas, segundo cuadrimestre, de **4,5 créditos**.

Os principais **prerrequisitos** estúdanse nas materias de *Topoloxía dos Espazos Euclidianos*, do primeiro curso, e *Topoloxía Xeral*, do primeiro cuadrimestre de terceiro. Precísanse, tamén, os coñecementos sobre grupos e os seus homomorfismos, desenvoltos na materia *Estruturas Alxébricas*, do primeiro cuadrimestre de terceiro. E, en xeral, a madurez e cultura matemática que se supón, pasado xa o ecuador dos estudos de Grao.

## OBXECTIVOS DA MATERIA

A *superficie* é un obxecto matemático importante e, como tal, dedícaselle un espazo amplo nos estudos do Grao. Constitúe o exemplo máis sinxelo de variedade multidimensional e as súas propiedades xeométricas, establecidas en gran medida por Gauss hai 200 anos, constitúen o punto de partida do estudo en dimensións superiores. Estudo que, en dimensión dous, se desenvolve na materia *Teoría Global de Superficies*, que se cursa ao tempo que esta.

Aquí adóptase un punto de vista máis abstracto, prescindindo de calquera consideración métrica, centrándose nas propiedades topolóxicas do espazo subxacente. Un marco que, neste caso excepcional, permite conclusións precisas e completas: o *Teorema de Clasificación Topolóxica das Superficies*. O curso vertébrase arredor do enunciado e demostración deste resultado no caso máis simple, o das *superficies compactas*.

A **primeira parte** da materia aborda os conceptos de *conexidade* e *compacidade*, conceptos xa estudados na materia *Topoloxía dos Espazos Euclidianos*. Agora faise o estudo nun marco máis abstracto, onde non todos os métodos empregados nos espazos euclidianos son válidos, e se introducen conceptos e métodos novos, como o estudo local.

Preténdese afondar no coñecemento destes conceptos, de grande importancia en todas as ramas da matemática. O tema de compacidade en espazos métricos permite conectar coas técnicas usadas nos espazos euclidianos e constitúe unha boa preparación para un futuro estudo máis acaído da compacidade en espazos de funcións e espazos de Hilbert.

Estes primeiros temas servirán tamén para asentarmos os conceptos e as técnicas introducidas na materia de *Topoloxía Xeral* e, certamente, son imprescindibles para abordar o núcleo da materia, o estudo da topoloxía das superficies.

A **segunda parte** do programa muda o rexistro de abstracción para realizar un estudo moi xeométrico das *superficies compactas*. Preséntase cada superficie como cociente dunha rexión poligonal no plano, e desenvólvese un procedemento elemental para recoñecer se os cocientes de dúas rexións distintas dan lugar a superficies homeomorfas. Aproveítase este estudo xeométrico para introducir dous invariantes das superficies que as determinan completamente: a *característica de Euler* e a *orientabilidade*.

En fin, a **terceira parte** aborda o estudo dunha das construcións máis elegantes e eficaces da matemática do século XX, o *grupo fundamental* ou *grupo de Poincaré* dun espazo topolóxico. Mediante esta ferramenta, un problema xeométrico vaise traducir nun problema alxébrico máis simple, cuxa resolución aportará información sobre o problema orixinario. Neste caso, de feito, a solución do problema alxébrico permite concluír a clasificación das superficies compactas.

De forma explícita salientamos os seguintes obxectivos:

- Coñecer exemplos de superficies, compactas e non compactas, con e sen bordo, orientábeis e non orientábeis
- Manexar invariantes topolóxicos coma xénero dunha superficie e característica de Euler.
- Coñecer e comprender o Teorema de Clasificación, o seu alcance e consecuencias
- Recoñecer unha superficie compacta en función do seu xénero ou da súa característica de Euler, e do feito de ser, ou non, orientábel
- Comprender unha demostración longa e profunda, con dúas partes conceptualmente moi diferentes, e que precisa recursos topolóxicos e alxébricos.

## PROGRAMA

### Tema 1 Conexidade (0,25 créditos)

- 1.1 Separación e conexidade
- 1.2 Compoñentes conexas

### Tema 2 Conexidade por camiños (0,25 créditos)

- 2.1 Camiño. Camiño inverso. Produto de camiños
  - 2.2 Conexidade por camiños
  - 2.3 Conexidade local por camiños
- Apéndice: Grupos topolóxicos. Accións de grupos

### Tema 3 Compacidade (0,5 créditos)

- 3.1 Coberturas e subcoberturas
  - 3.2 Definición de compacidade
  - 3.3 Compacidade dun produto
  - 3.4 Compacidade en espazos métricos
- Apéndice: A propiedade de intersección finita

### Tema 4 Compacidade local (0,25 créditos)

- 4.1 Compacidade local
  - 4.2 Compactificación de Aleksandrov
- Apéndice: Compactificación e extensión de funcións reais continuas limitadas

### Tema 5 Superficies Compactas (0,5 créditos)

- 5.1 Superficies. Superficies con bordo. Suma conexas de superficies
- 5.2 Triangulacións. As superficies como cocientes de rexións planas
- 5.3 Orientabilidade

### Tema 6 Clasificación das Superficies Compactas, I (0,25 créditos)

- 6.1 Símbolo da presentación dunha superficie
  - 6.2 Redución do símbolo a unha forma canónica
  - 6.3 A característica de Euler dunha superficie
- Apéndice: Revestimento de orientación dunha superficie

### Tema 7 Homotopía (0,5 créditos)

- 7.1 Homotopía de aplicacións.
- 7.2 Retracción e deformación
- 7.3 Espazos contráctiles
- 7.4 Equivalencias e Tipo de homotopía

**Tema 8 O Grupo Fundamental** (0,5 créditos)

- 8.1 Homotopía de camiños. Lazos
- 8.2 O Grupo Fundamental
- Apéndice: Categorías e Functores

**Tema 9 Cálculo do Grupo Fundamental** (0,75 créditos)

- 9.1 Espazos simplemente conexos
- 9.2 O Grupo Fundamental das esferas
- 9.3 O Grupo Fundamental da circunferencia
- 9.4 Teorema do punto fixo de Brouwer
- Apéndice: Grupo fundamental dos grupos topolóxicos
- Apéndice: Grao duna aplicación de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{S}^1$ .

**Tema 10 Clasificación das Superficies Compactas, II** (0,75 créditos)

- 10.1 Presentación de grupos por xeradores e relacións. O abelianizado dun grupo
- 10.2 O Grupo Fundamental das superficies compactas
- 10.3 Teorema de Clasificación das Superficies Compactas
- Apéndice: Teorema de clasificación das superficies compactas con bordo

**BIBLIOGRAFÍA**

As referencias [14] e [15] constitúen a bibliografía básica.

1. Armstrong, M. A., *Topología Básica*, Editorial Reverté, Barcelona, 1987.
2. Buskes, G. and van Rooij, A. *Topological Spaces: From Distance to Neighborhood*. Springer-Verlag. New York, 1997
3. Crossley, M. D., *Essential Topology*. Springer-Verlag, London, 2005.
4. Gallier, J. and Xu, D. *A guide to the classification theorem for compact surfaces*. Geometry and Computing, Springer, 2013.
5. Godbillon, C., *Éléments de Topologie Algébrique*, Hermann, Paris, 1971
6. Goodman, S. E., *Beginning Topology*. Undergraduat Texts, **10**, AMS, Providence, Rhode Island, 2009
7. Gramain, A., *Topologie des Surfaces*. Presses Universitaires de France, Paris, 1971
8. Greenberg, M. J. and Harper, J. R., *Algebraic Topology: a first course*, Benjamin, Massachusetts, 1981.
9. Hu, S.-T., *Elements of General Topology*. Holden-Day, Inc, San Francisco, 1964

10. Katok, A., Climenhaga, V., *Lectures on Surfaces: (almost) you wanted to know about them*. Student Math. Library, **46**, AMS, Providence, R.I., 2008
11. Kinsey, L. C., *Topology of Surfaces*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993
12. Lee, J. M., *Introduction to topological manifolds* Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000
13. McCleary, J., *A First Course in Topology. Continuity and Dimension*. Student Math. Library, **31**, AMS, Providence, R. I., 2006.
14. Masa Vázquez, X.M., *Topoloxía xeral. Introdución aos espacios euclidianos, métricos e topolóxicos*. Manuais universitarios, 1. Universidade de Santiago de Compostela, 1999.
15. Massey, W. S., *Introducción a la Topología Algebraica*, Editorial Reverté, Barcelona, 1972.
16. Messer, R., Straffin, P., *Topology Now!* The Mathematical Association of America, Washington, DC, 2006.
17. Munkres, J. R., *Topología*, Prentice Hall, Madrid, 2002
18. Outerelo Domínguez, E., Sánchez Abril, J. M., *Elementos de Topología*, Editorial Sanz Torres, Madrid, 2008.
19. Reid, M., Szendroi, B., *Geometry and Topology*, Cambridge University Press, 2005
20. Sutherland, W.A., *Introduction to metric and topological spaces*. Clarendon Press, Oxford, 1998.

## COMPETENCIAS

Ademais das competencias xenéricas contempladas para a materia na Memoria do Grao, indicamos as seguintes de forma máis concreta.

Recoñecer espazos conexos, ou conexos por camiños, e ser capaces de elaborar procedementos de comprobación, xa sexan indirectos, xa sexa construíndo os camiños pertinentes.

Manexar coberturas abertas e subcoberturas, sabendo discernir sobre o carácter compacto dun espazo.

Construír presentacións poligonais planas de superficies sinxelas. Recoñecer polas presentacións de que superficie se trata, identificándoa co referente do Teorema de Clasificación.

Utilizar o functor grupo fundamental para abordar problemas xeométricos. Ser capaz de calcular o grupo fundamental de espazos simples; en particular, das superficies compactas.

Coñecer exemplos e contra-exemplos de espazos que ilustren as propiedades estudadas.

Como competencia transversal, adicarase atención ao uso da lingua inglesa, proponendo lecturas axeitadas e insistindo na presenza do léxico matemático en inglés.

## INDICACIÓNS METODOLÓXICAS

### Traballo na aula e materiais

Na aula, nas diversas sesións que de seguido se describen, se abordarán os principais contidos da materia, tanto teóricos como prácticos. Preténdese unha exposición selectiva, en función de parámetros como importancia e dificultade. Non exhaustiva. As notas de clase poderán ser unha boa ferramenta de traballo, pero precisarán o complemento doutras fontes, especialmente bibliográficas.

Ao longo do curso estarán dispoñíbeis outros recursos. Existe un *curso virtual* de apoio, que se describe brevemente na última páxina desta Guía-Programa, e unha *conta de twitter* asociada. Dispónse dunha *Guía de Estudo*, publicada no curso virtual, que ven sendo como os apuntamentos de clase do profesor, que se irán actualizando. Periodicamente entregaranse *Boletíns*, que conterán exercicios e outras propostas de traballo, que serán o material base a desenvolver nas sesións dos *Seminarios*.

O Plan de Estudos do Grao estrutura o traballo presencial desta materia en tres tipos de sesións:

**Clases do grupo completo** (3 créditos). Son as sesións adicadas ao desenvolvemento da materia. Trátase, fundamentalmente, de leccións impartidas polo profesor. De ordinario, nunha mesma sesión adicarase un tempo á exposición ou ilustración de algunha cuestión teórica, e outro tempo á resolución de problemas ou exercicios. As veces, o modelo achegarase ao da lección maxistral, as veces procurárase a implicación de todo o alumnado na discusión das cuestións suscitadas. Como material de apoio para estas sesións, no curso virtual estará dispoñíbel unha *Guía de estudo*, que se irá actualizando ao longo do curso.

**Seminarios** (1,5 créditos). Son clases en grupo reducido. Preténdese unha maior participación activa das e dos estudantes. Para facilitar a participación, formaranse grupos de traballo. As sesións dos Seminarios terán formatos diversos. Haberá sesións de exercicios, nas que se resolverán os exercicios propostos nos Boletíns; cada exercicio será asignado a un grupo de traballo, para que o prepare e expoña. Noutras sesións abordaranse cuestións preparadas polos estudantes, non explicadas previamente; para a preparación destas sesións contarase cun guión elaborado polo Profesor; cada grupo terá que encargarse dunha sesión deste tipo. En fin, outras veces, as menos, serán talleres de exemplos e aplicacións da teoría estudada, sen un encargo previo a ningún grupo, ou se discutirá un texto, tal vez unha lectura recomendada. Os *Boletíns* co material de traballo para os Seminarios estarán dispoñíbeis no curso virtual.

**Sesións en grupos moi reducidos** (0,2 créditos). Son sesións que teñen como obxectivo o seguimento da aprendizaxe; o seu formato axeitárase á marcha do curso no momento da súa realización. Previsiblemente, antes de cada sesión de seminario en que grupos de estudantes teñan que expoñer un tema, haberá unha destas sesións cos membros dos grupos implicados, para discutir o traballo a facer.

Ao longo do curso propoñeráse, así mesmo, un *traballo escrito*, que permita incidir na corrección desa forma de expresión matemática. O formato e momento desta proba intermedia, que poderá realizarse nunha sesión na aula, previamente anunciada, ou cada quen libremente, dependerá, entre outros factores, dos acordos conxuntos do profesorado para a programación do curso. Será concretado cando a presentación da materia, o primeiro día de clase.

Tamén se propoñerán *lecturas recomendadas*, de interese para se achegar á bibliografía da materia, para coñecer outros enfoques, outros discursos. Eventualmente se poderá demandar a entrega dun comentario sobre as mesmas (a título orientativo, un comentario podería ter entre 150 e 300 palabras), ou podería ser tema de discusión nalgunha sesión na aula.

No curso virtual estará dispoñíbel un *Calendario do curso*, onde aparecerán as datas de diversas actividades propostas, así como unha previsión da temporización do programa.

## Estimación da carga de traballo

A seguinte táboa recolle a estimación da carga de traballo feita no Plan de Estudos:

<b>TRABALLO PRESENCIAL</b>		<b>TRABALLO PERSOAL</b>	
Clases maxistras	30	Estudo autónomo	45
Seminarios	13	Preparación dos seminarios	20
Titorías programadas	2	Lecturas recomendadas	2,5
<b>Total horas traballo presencial</b>	<b>45</b>	<b>Total horas traballo persoal</b>	<b>67,5</b>

## Recomendacións para o estudo da materia

Entre os coñecementos que se supoñen están os correspondentes ás materias *Topoloxía dos Espazos Euclidianos*, *Topoloxía Xeral* e *Estruturas Alxébricas*.

A teoría desenvolvida é moi abstracta, non é doado asimilala nunha primeira lectura. A desexable comprensión formal dos conceptos introducidos e das técnicas empregadas nas demostracións dos principais resultados, que non é pouco, non garante unha comprensión suficiente. O mellor camiño é estudar coidadosamente os exemplos sinxelos e abordar algún máis complicado, para comprender a natureza das súas dificultades.

Os exercicios son unha boa ferramenta de aprendizaxe. O interesante deles non é coñecer a resolución; o interesante é esforzarse en chegar a ela cos propios medios, nese esforzo sostido está a base da formación. Só despois de ensaiar varias formas de solución, de reflexionar, abordar, se cadra, casos particulares,... o coñecemento da resolución será instrutiva. Convén ter presente que, nesta materia, non se vai tratar de aprender a resolver un certo número de exercicios tipo. O sentido dos exercicios e dos exemplos é o de acadar unha mellor comprensión da teoría estudada e capacitarse no manexo das ferramentas que utiliza.

En fin, para aprender é necesario preguntar, preguntar todo o que non se entenda, sen a menor reserva. Na aula, ou no despacho do profesor, nas horas reservadas a titorías.

## INDICACIÓNS SOBRE A AVALIACIÓN

Haberá un dobre sistema de avaliación: a avaliación puntual, realizada mediante o exame final, e a avaliación continuada, realizada ao longo do curso, en base á participación activa na aula e aos traballos realizados.

O exame final consistirá dunha proba escrita. Nela propoñeranse algunhas cuestións a desenvolver, relacionadas cos contidos estudados, cun carácter máis teórico. Outras cuestións propoñerán a resolución de exercicios, que serán análogos aos realizados ao longo do curso.

O exame procura avaliar os coñecementos teóricos adquiridos, a capacidade de resolución de problemas e, moi especialmente, a adquisición das competencias enunciadas nesta programación. Valorarase en particular a claridade conceptual, rigor argumental, precisión, etc. Para quen



non teña participado nas actividades realizadas ao longo do curso, o exame podería ter un complemento oral, que se fixaría no momento da realización da proba escrita.

Para a avaliación continuada o profesor irá seguindo, día a día, o proceso de aprendizaxe de cada estudante. A base desta avaliación será a participación na clase, as actuacións no encerado nas sesións de grupos reducidos, os traballos entregados e a discusión dos mesmos, etc. A cualificación obtida neste proceso estará a disposición de cada estudante na web do curso antes da realización do exame final, ao remate do período de clases.

O criterio que o profesor se forma ao longo do curso, base da avaliación continuada, complementase co resultado do exame final. A cualificación da materia non será inferior á do exame final nin á suma do 65 % da nota do exame final e o 35 % da nota da avaliación continua. Para obter a cualificación de *Matrícula de Honra* será necesario ter participado regularmente nas actividades programadas.

## OUTRAS INFORMACIÓNS DE INTERESE

### Curso virtual

Está dispoñíbel na USC Virtual (<https://cv.usc.es/>) un *curso virtual* relativo ao programa da materia. Trátase dun curso de apoio á docencia presencial. Contén información sobre a materia, como esta *Guía Docente*, que se poderá ir ampliando; sobre o desenvolvemento do curso, como o *Calendario*; material para o traballo ordinario, especialmente o documento denominado *Leccións*, apuntamentos do profesor ao fio das clases maxistras, e os *Boletíns*, material base para o traballo nas sesións de Seminario; e os *Exames* das convocatorias anteriores, cos exercicios resoltos. Pódese atopar tamén material de *Topoloxía dos Espazos Euclidianos*, como referencia. Inclúense, así mesmo, algunhas presentacións, animacións, e enlaces a outras páxinas na rede con contidos relacionados coa materia. Irán incorporándose, no seu momento, outros recursos, como probas de avaliación, exames, cualificacións, etc. O curso virtual será tamén un medio máis de comunicación, no que aparecerán anuncios, ou se activarán foros de preguntas ou discusión.

Como medio adicional de intercomunicación, dispónse dunha conta de twitter da materia, que se aconsella seguir: <https://twitter.com/@topoloxia>

### Calendario

A seguinte é unha secuenciación temporal indicativa. No curso virtual irase actualizando o calendario.

CONEXIDADE	30 de xaneiro - 6 de febreiro
COMPACIDADE	7 de febreiro - 21 de febreiro
SUPERFICIES	27 de febreiro - 7 de marzo
HOMOTOPÍA	13 de marzo - 11 de abril
CLASIFICACIÓN	24 de abril - 9 de maio