Martes, 3 de nobembro de 2015

RESPOSTAS

Exercicio 1. O conxunto E é unión de abertos básicos, polo tanto, é un conxunto aberto; todos os seus puntos son interiores. O punto 0 é fronteiro, pois non está no conxunto e toda veciñanza básica, $[0, x)$, con $x > 0$, corta a E, pois contén puntos da forma $1/(2n+1)$. Por último, $\{0\} \cup E$ é un conxunto pechado: o seu complementar é o conxunto aberto

$$(-\infty, 0) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}) \right) \cup [1/2, +\infty)\,.$$

Logo, $\mathrm{Fr}(E) = \{0\}$.

Exercicio 2. Sexa $x \in U$. Temos que comprobar que $x \in \mathrm{Cl}(U \cap E)$. Sexa V unha veciñanza de x. Podemos, por comodidade, supoñer que é aberta. Trátase de demostrar $V \cap (U \cap E) \neq \emptyset$. Pero, por un lado, $V \cap U$ é un conxunto aberto non baleiro. Por outro,

$$V \cap (U \cap E) \,=\, (V \cap U) \cap E\,,$$

e este último conxunto é non baleiro por ser E denso.