DEPARTAMENTO DE XEOMETRIA E TOPOLOXIA
FACULTADE DE MATEMÁTICAS
Universidade de Santiago de Compostela

Prof. Xosé M. Masa Vázquez

Respostas
Topoloxía Xeral
11 de xaneiro de 2016

2. A condición de ser β_0 base local no punto x é que dada unha veciñanza U de x exista un $B_0 \in \beta_0$ contido nela. Como β_x é base local, existe $B \in \beta_x$ tal que $B \subset U$. Pola definición de β_0, $B \cap V \in \beta_0$. E $B \cap V \subset B \subset U$.

3. a) Certamente, a colección $\beta = \{[a, +\infty),\ a \in \mathbb{R}\}$ é base para algunha topoloxía τ en $\mathbb{R}$: o punto a de $\mathbb{R}$ pertence ao conxunto $[a, +\infty)$; a intersección de dous conxuntos de β é un deles.

b)

E	$\mathrm{Int}(E)$	$\mathrm{Cl}(E)$	$\mathrm{Fr}(E)$	E'
$\{0\}$	$\emptyset$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, 0)$
$\mathbb{N}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, 0]$	$\mathbb{R}$
$[-1, +\infty)$	$[-1, +\infty)$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, -1)$	$\mathbb{R}$
$(-\infty, 1]$	$\emptyset$	$(-\infty, 1]$	$(-\infty, 1]$	$(-\infty, 1)$

c) O espazo $(\mathbb{R}, \tau)$ non é Hausdorff, pois ten máis dun punto e non hai abertos non baleiros disxuntos. É normal, xa que non existen subconxuntos pechados non baleiros disxuntos. Unha base local no punto x está formada por un único conxunto, $[x, +\infty)$; logo o espazo é primeiro enumerábel. Non é segundo enumerábel, cada base ten que conter un aberto U_x tal que $x \in U_x \subset [x, +\infty)$; necesariamente $U_x = [x, +\infty)$. O subconxunto $\mathbb{Q}$ é denso, así o espazo é separábel. En fin, non é metrizábel, pois non é Hausdorff.

d) Teremos presente que no rango desta función cada conxunto $[x, +\infty)$ forma unha base local en x. Sexa $x \neq 0$. A súa imaxe por f é x^2, un número estritamente maior que 0. Consideremos a súa veciñanza $[x^2, +\infty)$. En calquera veciñanza $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ de x hai puntos con imaxe estritamente menor que x^2 (os puntos y da veciñanza con $|y| < |x|$). Logo a función f non é continua en x.

Calquera veciñanza do punto 0 ten imaxe na veciñanza $[0, +\infty)$, pois este conxunto é a imaxe da función. Logo f é continua en 0.

4. A aplicación diagonal D é continua sse as súas composicións con cada proxección, digamos, D_1 e D_2, son continuas. D_1 é a identidade de (X, τ_1) en si mesmo, sempre continua. D_2 é a identidade de (X, τ_1) en (X, τ_2); é continua sse τ_1 é máis fina que τ_2. Polo tanto, D é continua sse τ_1 é máis fina que τ_2.

5. a) Sempre $x \sim f(x)$. Para $x \in E$, $f(x) = f i_E(x) = f_E(i_E(x))$. Logo $p_E(x) = p_E(f_E(i_E(x)))$.

b) Vexamos que a función q é unha identificación. Por ser $q \circ i_E$ sobrexectiva, q é sobrexectiva. Sexa $U \subset E/\sim$. Supoñamos $q^{-1}(U)$ aberto. Logo $i_E^{-1}(q^{-1}(U))$ é aberto en E; ou sexa, $(q \circ i_E)^{-1}(U) = p_E^{-1}(U)$ é aberto. Como p_E é unha identificación, U é aberto.

c) Todo o que temos que comprobar é que q pasa ao cociente. Ou sexa, que se $x \sim y$, daquela $q(x) = q(y)$. De $x \sim y$ e das relacións $x \sim f(x)$, $y \sim f(y)$ dedúcese $f(x) \sim f(y)$ e, pois, $q(x) = p_E(f_E(x)) = p_E(f_E(y)) = q(y)$.

d) Acabamos de ver que $x \sim y$ implica $q(x) = q(y)$. Comprobemos agora o recíproco. A igualdade $q(x) = q(y)$ significa $f(x) \sim f(y)$. Como sempre $x \sim f(x)$ e $y \sim f(y)$, temos $x \sim y$. Isto permite concluír que $\overline{f}_E$ ten inversa.

Por ser p_X e q identificacións, tanto $\overline{f}_E$ como a súa inversa son continuas.

e) A función $f\colon \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ cumpre as condicións do enunciado: $f(x) \in \mathbb{S}^2$ e $x \sim \dfrac{x}{\|x\|}$.

A análise anterior permite afirmar que os cocientes $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$ e $\mathbb{S}^n/\sim$ son homeomorfos. O primeiro foi definido como espazo proxectivo real, $\mathbb{R}P^n$. A relación de equivalencia definida en $\mathbb{S}^n$ identifica puntos antipodais; é, pois, outra forma de presentar os espazos proxectivos.