DEPARTAMENTO DE XEOMETRIA E TOPOLOXIA
FACULTADE DE MATEMÁTICAS
Universidade de Santiago de Compostela

Prof. Xosé M. Masa Vázquez

Topoloxía Xeral
11 de xaneiro de 2016

1. Teorema de metrizabilidade de Urysohn

(2 puntos)

---

2. Sexa (X, τ) us espazo topolóxico, $x \in X$, $V \in \mathcal{V}_x$. Sexa β_x unha base local en x. Demostra que a colección $\beta_0 = \{B \cap V, B \in \beta_x\}$ é tamén unha base local en x.

(0,75 puntos)

---

3. Sexa
$$\beta = \{[a, +\infty),\, a \in \mathbb{R}\}\,.$$

a) Comproba que β é base para algunha topoloxía τ en $\mathbb{R}$.

b) Calcula interior, adherencia, fronteira e conxunto derivado dos seguintes subconxuntos:
$$\{0\}\,; \quad \mathbb{N}\,; \quad (0, +\infty)\,; \quad [-1, +\infty)\,; \quad (-\infty, 1]\,.$$

c) Discute se $(\mathbb{R}, \tau)$ é Hausdorff, normal, primeiro ou segundo enumerábel, separábel ou metrizábel.

d) Estuda a continuidade da función $f\colon (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau)$ dada por $f(x) = x^2$.

(2,25 puntos)

---

4. Considera nun conxunto X dúas topoloxías τ_1, τ_2. Discute a continuidade da aplicación diagonal
$$D\colon (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau_1) \times (X, \tau_2)\,, \quad D(x) = (x, x)\,.$$

(0,75 puntos)

---

5. Sexan X un espazo topolóxico, $\sim$ unha relación de equivalencia en X. Sexa $f\colon X \to X$ unha aplicación continua tal que para cada $x \in X$ se teña $x \sim f(x)$. Sexa E un subespazo de X tal que $f(X) \subset E$, $i_E\colon E \to X$ a inclusión. Denotemos por
$$p_X\colon X \to X/\!\sim \quad \text{e} \quad p_E\colon E \to E/\!\sim\,,$$
as proxeccións naturais, considerando en E a relación de equivalencia inducida.

Denotemos por f_E a función de X en E definida por f. Definamos unha función $q\colon X \to E/\!\sim$ como a composición $q = p_E \circ f_E$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, bend left, "f_E"] \arrow[dr, "q"] & X/\!\sim \arrow[d, "\overline{f}_E"] \\
E \arrow[u, bend left, "i_E"] \arrow[r, "p_E"] & E/\!\sim
\end{tikzcd}$$

a) Verifica a igualdade $q \circ i_E = p_E$.

b) Proba que a función q é unha identificación.

c) Comproba que a aplicación f_E define unha función $\overline{f}_E$ entre os espazos cocientes tal que $\overline{f}_E \circ p_X = q$.

d) Demostra que $\overline{f}_E$ é un homeomorfismo.

e) Utiliza o anterior para analizar a seguinte situación:
$X = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, $x \sim y$ se existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $x = \lambda y$. $E = \mathbb{S}^n$, $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|_2}$.

(2,25 puntos)

---

6. Converxencia de sucesións. Continuidade secuencial

(2 puntos)
