PROGRAMA - GUÍA DOCENTE

Grao en Matemáticas

TOPOLOXÍA XERAL

Prof. Xosé M. Masa Vázquez

Catedrático de Xeometría e Topoloxía

Curso 2016-17

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Datos descritivos da materia

CÓDIGO: G1011330

Materia ***obrigatoria*** de terceiro curso do Grao en Matemáticas, primeiro cuadrimestre, de ***4,5 créditos***.

Os principais ***prerrequisitos*** estúdanse na materia de *Topoloxía dos Espazos Euclidianos*, do primeiro curso. Precísanse, tamén, en xeral, a madurez e cultura matemática que se supón, pasado xa o ecuador dos estudos de Grao.

Na base do concepto de distancia encóntrase, por exemplo, o concepto de converxencia de sucesións de puntos e os seus límites, e un pode, tomando estas ideas como base, prescindir da noción de distancia.

Felix Hausdorff

A topoloxía conxuntista que imos estudar xurde, maiormente, do interese en aplicar os métodos do cálculo infinitesimal, tan eficaces, a situacións máis complexas, conxuntos onde os elementos non son necesariamente vectores dun espazo de dimensión finita. Os seus comezos pódense situar no traballo de Karl Weierstrass, alá polo ano 1860, no que analiza o concepto de límite dunha función e senta as bases da formulación rigorosa actual do cálculo. Uns anos despois, o desenvolvemento da teoría de conxuntos por George Cantor permitiría construír a Topoloxía Xeral como rama independente da Análise.

O formalismo que xa se utilizou no estudo topolóxico dos espazos euclidianos, cando non se limitaba a argumentar con ϵ e δ, responde á linguaxe coa que foi crecendo a nova teoría, que toma como punto de partida as propiedades dos denominados *conxuntos abertos*. Unha linguaxe que hoxe informa toda a matemática. Este proceso conduce a unha elaboración versátil e precisa, pero moi formal, que esvae a intuición inicial, no que o concepto de límite era central, obrigando a un recorrido as veces árido a través de conxuntos abertos e veciñanzas. Esta formulación, axiomática, da topoloxía quedou fixada no libro *Grundzüge der Mengenlehre* (Fundamentos da teoría de conxuntos), de F. Hausdorff, publicado en 1914.

Pero esta non foi nin a única nin a primeira motivación no xurdimento da topoloxía. Existe outra menos localizada no tempo, máis complexa e de maior alento, que albiscaba a necesidade dunha xeometría nova. Nesta liña, compre citar dous resultados de Leonard Euler (1707-1783), os máis antigos que hoxe se recoñecen como topolóxicos. O primeiro consiste na solución que deu o chamado *problema das pontes de Köninsberg* (daquela cidade de Prusia, hoxe, Kaliningrado, Rusia). O río Pregel atravesa a cidade, dividíndoa en tres rexións, comunicadas por sete pontes. Debatíase sobre a posibilidade de recorrer todas as pontes, pasando unha soa vez por cada unha; a solución dada por Euler enmárcase no que hoxe é topoloxía de grafos (vid. [16]). O outro resultado di que nun poliedro a suma $C - A + V$, onde C é o número de caras, A, o número de arestas e V, o de vértices, é sempre igual a 2. Na materia *Topoloxía de Superficies* verase que é un invariante topolóxico, coñecido como *característica de Euler-Poincaré*.

Varios matemáticos recoñeceron pronto a necesidade dun tipo novo de xeometría, destacando as profundas reflexións de Riemann, que apelan ao concepto de espazo abstracto de múltiples dimensións, recollidas na súa disertación *Ueber die Hypothesen, Welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sobre as hipóteses nas que se fundamenta a xeometría, 1854), que inaugura a era moderna en matemáticas. Pero é seguramente Henri Poincaré quen, a finais do s.XIX, no artigo de título *Analysis Situs*, denominación introducida por Leibniz nun contexto diferente, avanza o que se pode considerar a topoloxía como nova xeometría. O artigo encomeza así: «É coñecido o que se entende por orde de conexión dunha superficie e o papel importante que xoga esta noción na teoría xeral de funcións, ben que sexa (unha noción) prestada dunha rama completamente diferente das matemáticas, ou sexa, da xeometría de situación ou Analysis situs». Cita a Riemann e os seus estudos iniciais e sinala o uso que dalgúns destes resultados fai M. Picard nos seus traballos de Análise Matemática.

A denominación inicial de *analysis situs* mudou a *topoloxía* a partir de 1930, cando S. Lefschetz publica un libro con este nome (aínda que xa se usara case cen anos antes). Nos seguintes anos a topoloxía desenvolveuse a un ritmo acelerado, influíndo amplamente en toda a matemática posterior, converténdose, xunto á Análise e á Álxebra, nun dos piares da matemática.

OBXECTIVOS DA MATERIA

O programa que seguiremos supón unha continuación do desenvolvido na materia *Topoloxía dos Espazos Euclidianos*, do primeiro curso do Grao, agora nun marco moito máis abstracto. Vertébrase sobre dous eixos de interese: dunha parte, achegármonos a algúns espazos métricos que xogan un papel central en moitas teorías matemáticas, como certos espazos de funcións, ou o espazo de Hilbert; doutra parte, dotármonos dos conceptos e resultados necesarios para analizar certos espazos topolóxicos relevantes en xeometría, como as superficies ou, máis xeralmente, as variedades topolóxicas. Na selección de contidos procúrase equilibrar a imprescindible exposición teórica abstracta, orientada non só a fornecer as ferramentas técnicas necesarias, senón a presentar e demostrar teoremas importantes e algunhas das súas aplicacións, co estudo de exemplos significativos; o que obriga a limitar o estudo xeral a situacións razoablemente regulares, renunciando a análise de tantas excepcións á norma, a pesares do papel destacado que xogaron (e xogan) no desenvolvemento da teoría.

De forma explícita salientamos os seguintes obxectivos:

- Comprender a relación entre métrica e topoloxía. Saber concluír, nalgún caso regular, cando unha topoloxía ven dada por unha métrica.
- Descubrir as implicacións topolóxicas das propiedades de numerabilidade.
- Aprender a construír novos espazos topolóxicos a partir doutros dados, particularmente mediante a realización de produtos e cocientes.
- Asentar o concepto de continuidade, relacionándoo coas construcións feitas e estudando as primeiras propiedades de extensión de funcións.

PROGRAMA

Tema 1. Espazos topolóxicos (0,75 créditos)

1.1 Definición de topoloxía
1.2 Base dunha topoloxía
1.3 Veciñanzas e base local
1.4 Interior, adherencia, fronteira
1.5 Comparación de topoloxías.

Tema 2. Continuidade (0,5 créditos)

2.1 Funcións continuas
2.2 Topoloxía relativa: subespazos
2.3 Homeomorfismos e propiedades topolóxicas

Tema 3. Espazos métricos (0,5 créditos)

3.1 O espazo euclidiano

3.2 Métrica e espazo métrico

3.3 Topoloxía asociada a unha métrica

3.4 Isometrías

Tema 4. Metrizabilidade e numerabilidade (0,5 créditos)

4.1 Metrizabilidade e axioma de separación de Hausdorff

4.2 Primeiro enumerabilidade e converxencia

4.3 Converxencia en espazos métricos. Compleción

4.4 Segundo enumerabilidade e espazos separábeis

4.5 Teorema de Baire

Tema 5. Espazos vectoriais normados (0,5 créditos)

5.1 Norma nun espazo vectorial

5.2 Continuidade das aplicacións lineares

5.3 O espazo de Banach $\mathcal{C}(I;\mathbb{R})$

5.4 O espazo de Hilbert

Tema 6. Espazos suma e produto (0,5 créditos)

6.1 Topoloxías inducidas

6.2 Suma topolóxica

6.3 Produto topolóxico

Tema 7. Espazos cociente (0,5 créditos)

7.1 Relacións de equivalencia

7.2 Identificacións e espazos cociente

Tema 8. Espazos normais (0,75 créditos)

8.1 O problema de extensión. Retractos

8.2 Espazos normais

8.3 Lema de Urysohn

8.4 Teorema de extensión de Tietze

8.5 Teorema de metrizabilidade de Urysohn

Referencias

[1] Adams, C. and Franzosa, R. *Introduction to Topology.* Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2008

[2] Bartle, R. G., *Introducción al Análisis Matemático.* Editorial Limusa, México, 1980.

[3] Buskes, G. and van Rooij, A. *Topological Spaces: From Distance to Neighborhood.* Springer-Verlag. New york, 1997

[4] Crossley, M. D., *Essential Topology.* Springer-Verlag, London, 2005.

[5] Dugundji, J., *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[6] Godbillon, C., *Éléments de Topologie Algébrique*, Hermann, Paris, 1971

[7] Goodman, S. E., *Beginning Topology.* Undergraduat Texts, **10**, AMS, Providence, Rhode Island, 2009

[8] W. Greub, *Linear Algebra.* Springer Verlag, 1974

[9] Hu, S.-T., *Elements of General Topology.* Holden-Day, Inc, San Francisco, 1964

[10] Krantz, Steven G., *Essentials of topology with applications.* CRC Press, Boca Raton, Fl. (EEUU), 2010.

[11] McCleary, J., *A First Course in Topology. Continuity and Dimension.* Student Math. Library, **31**, AMS, Providence, R. I., 2006.

[12] Masa Vázquez, X.M., *Topoloxía xeral. Introducción aos espazos euclidianos, métricos e topolóxicos.* Manuais universitarios, 1. Universidade de Santiago de Compostela, 1999.

[13] Messer, R., Straffin, P., *Topology Now*! The Mathematical Association of America, Washington, DC, 2006.

[14] Munkres, J. R., *Topología*, Prentice Hall, Madrid, 2002

[15] Outerelo Domínguez, E., Sánchez Abril, J. M., *Elementos de Topología*, Editorial Sanz Torres, Madrid, 2008.

[16] Reid, M. and Szendroi, B., *Geometry and Topology* , Cambridge University Press, 2005

[17] Steen, L. A., Seebach, J. A., *Counterexamples in Topology*, Dover Publ. Inc., Mineola, NY, 1995.

[18] Sutherland, W.A., *Introduction to metric and topological spaces.* Clarendon Press, Oxford, 1998.

[19] Viro, O.Ya., Ivanov, O.A., Netsvetaev, N.Yu. , Kharlamov, V.M., *Elementary topology : problem textbook*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2008

[20] Willard, S., *General Topology.* Addison-Wesley, Massachusetts, 1968.

COMPETENCIAS

En liña coas competencias xenéricas contempladas para o módulo *Topoloxía* na Memoria do Grao, indicamos as seguintes:

- Ser capaz de elaborar demostracións de resultados teóricos sinxelos.
- Resolver exercicios de dificultade media, do tipo dos abordados ao longo do curso.
- Recoñecer as diversas propiedades dos espazos e as relacións entre elas. Dispor de exemplos e contra-exemplos que as ilustren.
- Manexar as ferramentas formais da topoloxía xeral, coma interior e adherencia, para caracterizar propiedades topolóxicas.
- Construír aplicacións continuas, homeomorfismos e novos espazos topolóxicos.

Como competencia transversal, adicarase atención ao uso da lingua inglesa, propoñendo lecturas axeitadas e insistindo na presencia do léxico matemático en inglés.

INDICACIÓNS METODOLÓXICAS

Dime e esquézoo,
ensíname e recórdoo,
involúcrame e apréndoo.

Benjamin Franklin

Traballo na aula e materiais

Na aula, nas diversas sesións que de seguido se describen, se abordarán os principais contidos da materia, tanto teóricos como prácticos. Preténdese unha exposición selectiva, en función de parámetros como importancia e dificultade. Non exhaustiva. As notas de clase poderán ser unha boa ferramenta de traballo, pero precisarán o complemento doutras fontes, especialmente bibliográficas.

Existe un ***curso virtual*** de apoio, que se describe brevemente na última páxina desta Guía-Programa.

O Plan de Estudos do Grao estrutura o traballo presencial desta materia en tres tipos de sesións:

Clases do grupo completo (3 créditos). Son as sesións adicadas ao desenvolvemento da materia. Trátase, fundamentalmente, de leccións impartidas polo profesor. De ordinario, nunha mesma sesión adicarase un tempo á exposición ou ilustración de algunha cuestión teórica, e outro tempo á resolución de problemas ou exercicios. As veces, o modelo achegarase ao da lección maxistral, as veces procurarase a implicación de todo o alumnado na discusión das cuestións suscitadas. Como material de apoio para estas sesións, no curso virtual estará dispoñíbel unha *Guía de estudo*, que se irá actualizando ao longo do curso.

Seminarios (1,5 créditos). Son clases en grupo reducido. Preténdese unha maior participación activa das e dos estudantes. Para facilitar a participación, formaranse grupos de traballo. Os grupos constituiranse na primeira sesión de cada Seminario. A participación neles será voluntaria, pero coa mesma asúmese un compromiso firme de adicación e permanencia. As sesións dos Seminarios terán formatos diversos. Haberá sesións de exercicios, nas que se resolverán os exercicios propostos nos Boletíns; cada estudante partícipe nesta dinámica deberá expoñer un exercicio ao longo do curso; cada exercicio será asignado a un grupo de traballo, que decidirá quen o prepara e expón. Noutras sesións abordaranse cuestións non explicadas previamente, expostas colectivamente por cada grupo. Para a preparación destas sesións contarase cun guión elaborado polo profesor; cada grupo terá que encargarse dunha sesión deste tipo. En fin, outras veces, as menos, serán talleres de exemplos e aplicacións da teoría estudada, sen un encargo previo a ningún grupo, ou se discutirá un texto, tal vez unha lectura recomendada. Os *Boletíns* co material de traballo para os Seminarios estarán dispoñíbeis no curso virtual.

Sesións en grupos moi reducidos (0,2 créditos). Trátase de titorías programadas. O seu formato axeitarase á marcha do curso no momento da súa realización. Previsiblemente, antes de cada sesión de seminario haberá unha destas sesións, á que deberá acudir quen teña que expoñer algún tema ou exercicio, para discutir o traballo a facer. Habida conta dos horarios do curso, previsiblemente estas sesións realizaranse os mércoles pola tarde.

Ao longo do curso propoñerase, así mesmo, un ***traballo escrito***, que permita incidir na corrección desa forma de expresión matemática. O formato e momento desta proba intermedia, que poderá realizarse nunha sesión na aula, previamente anunciada, ou cada quen libremente, dependerá, entre outros factores, dos acordos conxuntos do profesorado para a programación do curso. Será concretado cando a presentación da materia, o primeiro día de clase.

En función do tempo dispoñíbel, tamén se poderán propor ***lecturas recomendadas***, de interese para se achegar á bibliografía da materia, para coñecer outros enfoques, outros discursos. Eventualmente se poderá demandar a entrega dun comentario sobre as mesmas, ou podería ser tema de discusión nalgunha sesión na aula.

No curso virtual estará dispoñíbel un ***Calendario do curso***, onde aparecerán as datas de diversas actividades propostas, así como unha previsión da temporización do programa.

Estimación da carga de traballo

A seguinte táboa recolle a estimación da carga de traballo, conxugando calendario e Plan de Estudos:

TRABALLO PRESENCIAL		**TRABALLO PERSOAL**	
Clases maxistrais	30	Estudo autónomo	47,5
Seminarios	13	Preparación dos seminarios	20
Titorías programadas	2		
Total horas traballo presencial	**45**	**Total horas traballo persoal**	**67,5**

Recomendacións para o estudo da materia

Ensinar a quen non quer aprender é como sementar un campo sen aralo.

Richard Whately (1787-1863) Educador británico

Entre os coñecementos que se supoñen están os correspondentes á materia *Topoloxía dos Espazos Euclidianos*. Dificilmente se poderá adentrar no novo discurso máis abstracto quen os ignore. Tamén se precisarán algúns coñecementos de análise matemática, especialmente relativos a funcións dunha variable real, e de álxebra linear.

A teoría desenvolvida é moi abstracta, non é doado asimilala nunha primeira lectura. A desexable comprensión formal dos conceptos introducidos e das técnicas empregadas nas demostracións dos principais resultados, que non é pouco, non garante unha comprensión suficiente. O mellor camiño é estudar coidadosamente os exemplos sinxelos e abordar algún máis complicado, para comprender a natureza das súas dificultades.

Os exercicios son unha boa ferramenta de aprendizaxe. O interesante deles non é coñecer a resolución; o interesante é esforzarse en chegar a ela cos propios medios, nese esforzo sostido está a base da formación. Só despois de ensaiar varias formas de solución, de reflexionar, abordar, se cadra, casos particulares,... o coñecemento da resolución será instrutiva. Convén ter presente que, nesta materia, non se vai tratar de aprender a resolver un certo número de exercicios tipo. O sentido dos exercicios e dos exemplos é o de acadar unha mellor comprensión da teoría estudada e capacitarse no manexo das ferramentas que utiliza.

En fin, para aprender é necesario preguntar, preguntar todo o que non se entenda, sen a menor reserva. Na aula, ou no despacho do profesor, nas horas reservadas a titorías.

INDICACIÓNS SOBRE A AVALIACIÓN

Moitos profesores gastan o tempo facendo preguntas para descubrir o que non sabe o alumno, cando a verdadeira arte de preguntar ten como finalidade coñecer o que o alumno sabe ou é capaz de aprender.

A. Einstein, 1920

Haberá un dobre sistema de avaliación: a avaliación puntual, realizada mediante o exame final, e a avaliación continuada, realizada ao longo do curso, en base á participación activa na aula e aos traballos realizados.

O exame final consistirá nunha proba escrita. Nela propoñeranse algunhas cuestións a desenvolver, relacionadas cos contidos estudados, cun carácter máis teórico. Outras cuestións demandarán a resolución de exercicios, que serán análogos aos realizados ao longo do curso.

O exame procura avaliar os coñecementos teóricos adquiridos, a capacidade de resolución de problemas e, moi especialmente, a adquisición das competencias enunciadas nesta programación. Valorarase en particular a claridade conceptual, rigor argumental e precisión.

Para a avaliación continuada o profesor irá seguindo, día a día, o proceso de aprendizaxe de cada estudante. A base desta avaliación será a participación na clase, as actuacións no encerado nas sesións de grupos reducidos, os traballos entregados e a discusión dos mesmos. A cualificación obtida neste proceso estará á disposición de cada estudante na web do curso antes da realización do exame final, ao remate do período de clases.

O criterio que o profesor se forma ao longo do curso, base da avaliación continuada, compleméntase co resultado do exame final. A cualificación da materia non será inferior á do exame final nin á suma do 65 % da nota do exame final e o 35 % da nota da avaliación continua. Para obter a cualificación de *Matrícula de Honra* será necesario ter participado regularmente nas actividades programadas.

OUTRAS INFORMACIÓNS DE INTERESE

Curso virtual

Está dispoñíbel un ***curso virtual*** de apoio á docencia presencial. A este curso pódese acceder no enderezo `topoloxia.com`

Tamén se pode acceder a través da USC Virtual (https://cv.usc.es/), onde se publicaran adicionalmente notificacións de carácter máis oficial ou confidencial, como cualificacións, e estará dispoñíbel un foro.

O curso virtual contén información sobre a materia, incluída esta ***Guía Docente***; sobre o desenvolvemento do curso, como o ***Calendario***; material para o traballo ordinario, especialmente o documento denominado ***Guía de estudo***, apuntamentos do profesor ao fio das clases maxistrais, e os ***Boletíns***, material base para o traballo nas sesións de Seminario. Pódese atopar tamén material de *Topoloxía dos Espazos Euclidianos* e de *Topoloxía de Superficies*. Inclúense, así mesmo, exames propostos polo profesor da materia en convocatorias anteriores, con indicacións para a resolución dos exercicios; e algunhas presentacións, animacións, e enlaces a outras páxinas na rede con contidos relacionados coa materia. Irán incorporándose, no seu momento, outros recursos, como probas de avaliación, novos exames e cualificacións. O curso virtual será tamén un medio máis de comunicación, no que aparecerán anuncios, ou se activarán foros de preguntas ou discusión.

Como medio adicional de intercomunicación, disponse dunha conta de twitter da materia, que se aconsella seguir: https://twitter.com/@topoloxia

Calendario

A seguinte é unha secuenciación temporal indicativa. No curso virtual irase actualizando o calendario.

Presentación	12 de setembro
Espazos topolóxicos	13 de setembro - 4 de outubro
Continuidade	23 de setembro - 11 de outubro
Espazos métricos	30 de setembro - 18 de outubro
Metrizabilidade e numerabilidade	14 de outubro - 8 de novembro
Espazos vectoriais normados	3 de novembro - 15 de novembro
Espazos suma e produto	11 de novembro - 29 de novembro
Espazos cociente	17 de novembro - 13 de decembro
Espazos normais	1 de decembro - 20 de decembro

PROGRAMME

Lecture 1. Topological spaces

1.1 Definition of topology
1.2 Basis of a topology
1.3 Neighborhoods and local basis
1.4 Interior, clousure, boundary
1.5 Comparison of topologies

Lecture 2. Continuity

2.1 Continuous functions
2.2 Relative topology: subspaces
2.3 Homeomorphisms and topological properties

Lecture 3. Metric spaces

3.1 The Euclidean space
3.2 Metric and metric space
3.3 Metric topology
3.4 Isometries

Lecture 4. Metrizability and countability

4.1 Metrizability and Hausdorff axiom
4.2 First countable spaces and convergence
4.3 Convergence in metric spaces. Completion
4.4 Second countable and separable spaces
4.5 The Baire theorem

Lecture 5. Normed vector spaces

5.1 Norm in a vector space
5.2 The continuity of the linear applications
5.3 The Banach space $\mathcal{C}(I, R)$
5.4 The Hilbert space

Lecture 6. Sum and product spaces

6.1 Induced topologies
6.2 Topological sum
6.3 Topological product

Lecture 7. Quotient spaces

7.1 Equivalences relations
7.2 Identifications and quotient spaces

Lecture 8. Normal spaces

8.1 The problem of extension. Retracts
8.2 Normal spaces
8.3 The Urysohn Lemma
8.4 The Tietze extension theorem
8.5 The Urysohn metrization theorem