Xoves, 10 de novembro de 2016

Respostas ao exercicio

Imos considerar o enunciado da proba **B**. Multiplicando por -1 se traduce ao caso da proba **A**.

Para comprobar que a colección de subconxuntos de $\mathbb{R}$ é base para algunha topoloxía, en primeiro lugar debe verificarse

$$\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}(-\infty,x] \,=\, \mathbb{R}\,.$$

Dado $z\in\mathbb{R}$, polo carácter arquimediano de $\mathbb{R}$ existe un enteiro n tal que $z\leq n$; logo, $z\in(-\infty,n]$. (Na opción A, un n tal que $-z\leq n$, e $z\in[-n,+\infty)$).

En segundo lugar, se $z\in(-\infty,x_1]\cap(-\infty,x_2]$, a propia intersección é da forma $(-\infty,x]$, con x o menor de x_1 e x_2.

Establecido que esta colección é base dunha topoloxía, os conxuntos abertos son as unións de conxuntos da colección. Ou sexa, o baleiro, $\mathbb{R}$, os propios $(-\infty,x]$ cando x sexa racional, e os conxuntos da forma $(-\infty,z)$, $z\in\mathbb{R}$: tomando unha sucesión $\{q_n\}$ de puntos de $\mathbb{Q}$, sempre $q_n<z$, que converxa a z, tense

$$(-\infty,z) \,=\, \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-\infty,q_n]\,.$$

Coñecidos os abertos, os pechados son os complementarios, $[z,+\infty)$, $z\in\mathbb{R}$, e $(x,+\infty)$, $x\in\mathbb{Q}$, ademais do baleiro e o total.

Así, de forma inmediata, resulta

	Int	Cl
$A=[0,+\infty)$	$\emptyset$	A
$B=[\pi,+\infty)$	$\emptyset$	B
$C=(-\infty,0]$	C	$\mathbb{R}$
$D=(-\infty,\pi]$	$(-\infty,\pi)$	$\mathbb{R}$

Os únicos puntos adherentes que non son de acumulación son os illados; neste caso, somentes o 0 no conxunto A, pois o aberto $(-\infty,0]$ corta a A unicamente no 0.