DEPARTAMENTO DE XEOMETRIA E TOPOLOXIA
FACULTADE DE MATEMÁTICAS
Universidade de Santiago de Compostela

Prof. Xosé M. Masa Vázquez

Respostas
Topoloxía Xeral
30 de xuño de 2016

1. Inicialmente supoñemos que p é continua, sobre, pechada e aberta e, por suposto, que X é normal. Sexa A un subconxunto pechado de $X/\mathcal{R}$, U un subconxunto aberto contendo A. Imos construír un aberto V tal que $A \subset V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset U$. Para iso, partimos de $p^{-1}(A) \subset p^{-1}(U)$. Existe un aberto W en X tal que

$$p^{-1}(A) \subset W \subset \mathrm{Cl}(W) \subset p^{-1}(U)\,.$$

Como p é sobre, $p(p^{-1}(A)) = A$. Ao aplicar p obtemos

$$A \subset p(W) \subset p(\mathrm{Cl}(W)) \subset U\,,$$

e $V = p(W)$ é aberto, $p(\mathrm{Cl}(W))$ é pechado, etc.

Supoñamos agora que p é pechada, pero non necesariamente aberta. O resultado segue a ser certo, como vimos no Seminario, exercicio 7.3. A argumentación é a seguinte: sexa A un subconxunto pechado de $X/\mathcal{R}$ e $A \subset U$, con U aberto en $X/\mathcal{R}$; pola normalidade de X, existe un aberto W en X tal que $p^{-1}(A) \subset W \subset \overline{W} \subset p^{-1}(U)$. O aberto $V = X/\mathcal{R} - p(X - W)$ verifica $p^{-1}(A) \subset p^{-1}(V) \subset W$.

2. a) Da relación $|d(x,0) - d(y,0)| \leq d(x,y)$ dedúcese que a norma é lipschitziana, logo, continua.

b) Para comprobar que h é unha función aberta, abonda ver que a imaxe dun aberto básico é un conxunto aberto. Partimos da base formada polas bólas abertas. Se o centro da bóla é un punto x, podemos supor que o seu raio é $r < \|x\|$. As semirectas desde a orixe tanxentes á bóla determinan un arco aberto na circunferencia, que é a imaxe da bóla.

c) Non é pechada. Por exemplo, a imaxe da hipérbole equilátera $xy = 1$ non é un conxunto pechado de $\mathbb{S}^1$.

d) Se $x \in \mathbb{S}^1$, $h(x) = x$, logo h é sobrexectiva. Ao ser continua, aberta e sobrexectiva, h é unha identificación.

4. a) Todo x de $\mathbb{R}$ pertence a algún conxunto da colección β; por exemplo, a $[[x], [x]+1)$, denotando por $[x]$ a parte enteira de x. Se dous conxuntos de β, $[p,q)$ e $[r,s)$, teñen un elemento x común, verifícase $\text{máx}\{p,r\} \leq x < \text{mín}\{q,s\}$, está definido o conxunto $[\text{máx}\{p,r\}, \text{mín}\{q,s\})$, que é a intersección dos dous, contén x e é aínda un elemento de β. Logo cumpre as condicións para ser base dunha topoloxía τ de $\mathbb{R}$.

b) Todo conxunto $(p,q), p < q, p,q \in \mathbb{Q}$ é aberto, pois se pode expresar coma unión de abertos básicos:

$$(p,q) = \bigcup_n \left[p + \frac{q-p}{n}, q\right)\,,$$

para n grande. Como estes conxuntos (p,q) forman unha base da topoloxía usual de $\mathbb{R}$, dedúcese que τ é máis fina ca topoloxía usual. É estrictamente máis fina, pois os conxuntos $[p,q)$ non son abertos na usual.

Cada conxunto de β é aberto na topoloxía de Sorgenfry, polo que a topoloxía de Sorgenfry é máis fina que τ. É estrictamente máis fina, pois un conxunto $[x,y)$ con x irracional non pertence a τ, non existe $[p,q)$ de β con $x \in [p,q) \subset [x,y)$.

c)

$$\mathrm{Int}(A) = (e,3) \cup (\pi,5)\,;\ \mathrm{Cl}(A) = [e,3] \cup [\pi,5)\,;\ A' = [e,3) \cup [\pi,5)\,.$$
$$\mathrm{Int}(B) = [1,+\infty)\,;\ \mathrm{Cl}(B) = [-1,+\infty)\,;\ B' = [-1,+\infty)\,.$$

d) Sexan $x < y$ dous puntos de $\mathbb{R}$. Sexan p,q,r racionais, con $p < x$, $x < q < y$ e $y < r$. Os abertos $[p,q)$ e $[q,r)$ separan x e y, logo $(\mathbb{R},\tau)$ é Hausdorff. Como β é numerábel, o espazo $(\mathbb{R},\tau)$ é segundo enumerábel, logo primeiro enumerábel e separábel.

e) A proba é exactamente a mesma que a realizada para a recta de Sorgenfrey.

f) Como $(\mathbb{Q},\tau)$ é Hausdorff, normal e segundo enumerábel, polo Teorema de Urysohn é metrizábel.