DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Universidade de Santiago de Compostela

Prof. Xosé M. Masa Vázquez

Respostas
Topoloxía Xeral
17 de xaneiro de 2017

1. a) Dado un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, calquera conxunto da colección no que aparece unha bóla de centro o punto, o contén. Logo, a unión de todos é $\mathbb{R}^2$.
Sexan agora U e V conxuntos da colección, e $(x,y) \in U \cap V$. Considerando as bólas abertas de $\mathbb{R}^2$ que figuran na definición de U e de V, completas, o punto (x,y) sabemos que é centro dunha bóla aberta contida na intersección. Se $y \neq 0$, esa bóla W pertence á colección e verifica a relación requirida, $(x,y) \in W \subset U \cap V$ (tomando un raio máis pequeno, de ser necesario, para asegurar $r \leq |y|$). Se $y = 0$, a bóla intersecada co semiplano superior pechado é o W axeitado.

b)

$$\begin{aligned} \mathrm{Int}(A) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+1)^2 < 1, y > -1\} \\ \mathrm{Cl}(A) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+1)^2 \leq 1, y \geq -1\} \\ A' &= \mathrm{Cl}(A) - \{(0,0)\} \end{aligned}$$

c) A topoloxía inducida por τ en $\mathbb{R}^2$ menos o eixo de abscisas é a usual, logo a función en $\mathbb{R} - \{0\}$ é continua, por selo a composición coas proxeccións. No 0 non é continua: a imaxe recíproca da veciñanza $B_2((0,0),r) \cap \{(x,y) \mid y \geq 0\}$ do $(0,0)$ non é unha veciñanza do 0.

d) I) Tanto E coma F son unión de abertos básicos, logo son os dous abertos. Como son complementares, tamén son pechados.

II) A topoloxía inducida por τ en E e en F é a usual.

III) Resulta que E e F son espazos normais (por ter a topoloxía euclidiana), ao tempo abertos e pechados. Sexan A e B subconxuntos pechados disxuntos de $(\mathbb{R}^2, \tau)$. Denotamos $A_1 = A \cap E$, $B_1 = B \cap E$; $A_2 = A \cap F$, $B_2 = B \cap F$. Estas interseccións son conxuntos pechados en E e en F, respectivamente. E disxuntos, porque xa o eran A e B. Logo existen abertos disxuntos en E, U_1 e V_1, separando A_1 e B_1. Analogamente, U_2 e V_2 en F. Como E e F son abertos, os conxuntos $U = U_1 \cup U_2$ e $V = V_1 \cup V_2$ son abertos en $(\mathbb{R}^2, \tau)$, e separan A e B; o espazo é normal.

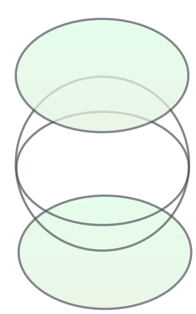
e) É moi inmediato comprobar que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ é Hausdorff. Se na base dada consideramos só conxuntos con bólas de centro puntos de coordenadas racionais e raio racional, teremos unha base enumerábel (mesmo argumento que para a topoloxía usual). Logo, polo Teorema de Metrización de Urysohn, o espazo é metrizábel.

Observación. Fixado un número real, z, no curso definimos unha métrica d_z en $\mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$d_z(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{se } x,y < z \text{ ou } x,y \geq z\,, \\ 1 + |x-y| & \text{noutro caso} \end{cases}$$

Tomando $z = 0$, a topoloxía τ corresponde á topoloxía da métrica produto da distancia usual e d_0.

3. Trátase de construír unha identificación $f\colon D^2 \times \{-1,1\} \to \mathbb{S}^2$ que defina a relación de equivalencia dada.



Imos considerar a función que leva o punto $(x,y,1)$ ao punto do hemisferio norte da esfera que ten coordenadas $(x,y,\sqrt{(1-x^2-y^2)})$, e o análogo para $(x,y,-1)$ e o hemisferio sur. Ou sexa,

$$f(x,y,t) = (x,y,t\sqrt{(1-x^2-y^2)})\,.$$

É pechada por ser o seu dominio compacto.

4. Fíxose en clase. O asunto é que un aberto básico en $X \times X$ é da forma $U \times V$, con U e V abertos en X. E que un aberto produto $U \times V$ non corta á diagonal (ou sexa, está contido no seu complementar) sse os conxuntos U e V son disxuntos.