DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Universidade de Santiago de Compostela

Prof. Xosé M. Masa Vázquez

Topoloxía Xeral
17 de xaneiro de 2017

1. a) Demostra que a seguinte colección de conxuntos en $\mathbb{R}^2$ é base dunha topoloxía τ:

$$\{B_2((x,y),r),(x,y)\in\mathbb{R}^2, y\neq 0, 0<r\leq |y|\}\cup\{B_2((z,0),r)\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 0\}, z\in\mathbb{R}, r>0\}.$$

b) Calcula interior, adherencia e conxunto derivado do seguinte subconxunto de $(\mathbb{R}^2,\tau)$:

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+1)^2\leq 1, y>-1\}.$$

c) Estuda a continuidade da función $f\colon(\mathbb{R},\tau_u)\to(\mathbb{R}^2,\tau)$ dada por $f(t)=(t,t^3)$.

d) Sexan $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 0\}$ e $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<0\}$.

I) Son E,F subconxuntos abertos ou pechados de $(\mathbb{R}^2,\tau)$?

II) Compara a topoloxía inducida por τ en E e en F coa topoloxía usual.

III) Utiliza a información anterior sobre E e F para concluír sobre o carácter normal de $(\mathbb{R}^2,\tau)$.

e) Discute o carácter metrizábel de $(\mathbb{R}^2,\tau)$.

(3,25 puntos)

---

2. Teorema de Baire

(2 puntos)

---

3. Sexa $X=D^2\times\{-1,1\}$, subespazo de $\mathbb{R}^3$ coa topoloxía usual, onde D^2 denota o disco unitario pechado en $\mathbb{R}^2$. Considera a relación de equivalencia en X xerada por:

$$((x,y),-1)\sim((x,y),1) \text{ se } \|(x,y)\|_2=1.$$

Demostra que o cociente $X/\!\sim$ é homeomorfo á esfera $\mathbb{S}^2$ coa topoloxía usual.

(1,5 puntos)

---

4. Demostra que un espazo topolóxico X é Hausdorff se, e só se, a diagonal en $X\times X$ é un conxunto pechado.

(1 punto)

---

5. Continuidade: definición, propiedades e exemplos. Homeomorfismos. Propiedades topolóxicas.

(2,25 puntos)

A puntuación é indicativa, a cualificación do exame é global.