DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Universidade de Santiago de Compostela

Prof. Xosé M. Masa Vázquez

Topoloxía Xeral
22 de xuño de 2017

1. Sexa τ_S a topoloxía de Sorgenfrey. Considera o espazo $(X,\tau) = (\mathbb{R},\tau_S) \times (\mathbb{R},\tau_u)$.

a) Constrúe unha base para a topoloxía τ de X.

b) Calcula interior, adherencia e conxunto derivado do seguinte subconxunto de (X,τ):

$$A = [0,1] \times \{1/n, n \in \mathbb{N}\}.$$

c) Estuda a continuidade da función $f\colon (\mathbb{R}^2,\tau_u) \to (X,\tau)$ dada por $f(s,t) = (st, \frac{t}{1+s^2})$.

d) É (X,τ) separábel?

e) Discute o carácter metrizábel de (X,τ).

(2,5 puntos)

2. Teorema de metrizabilidade de Urysohn

(2,5 puntos)

3. Considera a esfera $\mathbb{S}^2$ e a bóla unitaria pechada $B_3[0,1]$, subespazos de $\mathbb{R}^3$ coa topoloxía usual. Constrúe un homeomorfismo

$$h\colon C(\mathbb{S}^2) \longrightarrow B_3[0,1],$$

onde $C(\mathbb{S}^2)$ denota o cono de $\mathbb{S}^2$.

(1,5 puntos)

4. Sexa X un espazo topolóxico, E un subconxunto de X. Demostra:

a) $\mathrm{Int}(E) = \emptyset \Rightarrow X - E$ denso

b) $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(E)) = \emptyset \Leftrightarrow E \subset \mathrm{Cl}(X - \mathrm{Cl}(E))$

(1,25 puntos)

5. Espazos métricos: definición e exemplos. Topoloxía asociada a unha métrica. Métricas topoloxicamente equivalentes. Caracterización da adherencia dun conxunto usando a métrica.

(2,25 puntos)

A puntuación é indicativa, a cualificación do exame é global.