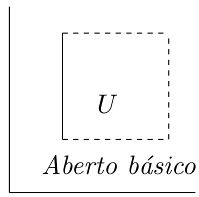
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Universidade de Santiago de Compostela

Prof. Xosé M. Masa Vázquez

Respostas
Topoloxía Xeral
22 de xuño de 2017

1. a) Tendo en conta que a topoloxía produto se define como aquela que ten por base os produtos de conxuntos abertos en cada factor, ésta colección é a resposta máis sinxela. A seguinte, que require unha pequena argumentación, é a máis útil:
Partindo de $\beta_{\mathcal{S}} = \{[a,b), a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$, base de $\tau_{\mathcal{S}}$, e de $\beta_u = \{(c,d), c,d \in \mathbb{R}, c < d\}$, base de τ_u, unha base do produto é a colección formada por produtos de elementos de cada base, ou sexa,

$$\beta \,=\, \{[a,b) \times (c,d), a,b,c,d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}\,.$$



b) O conxunto A non contén ningún aberto básico, logo $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$.
Os puntos $(x,0)$, con $0 \leq x \leq 1$ son de acumulación, pois se $(x,0) \in [a,b) \times (c,d)$, necesariamente $c < 0 < d$, existe $n \in \mathbb{N}$ con $1/n < d$ e $(x,1/n) \in [a,b) \times (c,d)$. Así, $A \cup ([0,1] \times \{0\}) \subset \mathrm{Cl}(A)$. Como o conxunto $A \cup ([0,1] \times \{0\})$ é pechado na topoloxía usual e a topoloxía de Sorgenfrey é máis fina que a usual, este contido é unha igualdade.
Os puntos $(1,1/n)$ non son de acumulación; o aberto básico $[1,2) \times (1/n+1, 1/n-1)$ só corta a A no punto $(1,1/n)$. Así, $A' = \mathrm{Cl}(A) - \{(1,1/n), n \in \mathbb{N}\}$.

c) Como o rango é un produto, estudamos a continuidade da composición coas proxeccións. A composición coa segunda proxección só fai intervir a topoloxía usual, está definida por operacións aritméticas, é continua. A outra composición, non. Para estudar a continuidade da outra proxección, un procedemento pode ser usar a continuidade secuencial, pois o dominio é $1^{\underline{0}}$-enumerábel. O punto no que este argumento pode ser máis delicado é o $(0,0)$. Tomemos a sucesión $\{(-1/n, 1/n)\}$ Converxe a $(0,0)$. Pero a súa imaxe, $\{-1/n^2\}$, na recta de Sorgenfrey non converxe. Resolvelo para o punto $(1,1)$, por exemplo, é ben doado. De facelo en casa poderíades atopar: se $y \neq 0$, $\{(x - 1/ny, y)\}$; se $x \neq 0$, $\{(x, y - 1/nx)\}$.

d) Cada aberto básico contén algún punto de $\mathbb{Q}^2$, logo o espazo é separábel

e) A topoloxía inducida no eixo de abscisas é a de Sorgenfrey, que non é metrizábel, logo este espazo non é metrizábel.

3. Trátase de construír unha identificación $f\colon \mathbb{S}^2 \times I \to B_3[0,1]$ que defina a relación de equivalencia dada. A idea vai ser levar $\mathbb{S}^2 \times \{1\}$ ao orixe de coordenadas e deixar os puntos de $\mathbb{S}^2 \times \{0\}$ fixos. Cada xeratriz do cilindro iría a un raio. Por exemplo:

$$f(x,t) \,=\, (1-t)x\,, \quad x \in \mathbb{S}^2\,,\; 0 \leq t \leq 1\,.$$

Mesmo argumento e mesma fórmula para calquera esfera $\mathbb{S}^r$. No curso fíxose para $\mathbb{S}^1$ (Exercicio 11.14).

4. A intención era propor dous apartados do exercicio 13.10, feito no Seminario. Pero un erro fixo que o apartado *a*) resultara moito máis simple, de feito, inmediato. O apartado *a*) debía dicir:

$\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(E)) \,=\, \emptyset \,\Rightarrow\, X - E$ denso

Pero no exame desapareceu a adherencia! Tal como se enunciou no exame, é unha equivalencia inmediata, pois $\mathrm{Int}(E) = X - \mathrm{Cl}(X - E)$ sempre.

Vexamos o apartado *b*). A implicación "$\Rightarrow$"é consecuencia de *a*), aplicada ao conxunto $\mathrm{Cl}(E)$.

A implicación "$\Leftarrow$"pódese argumentar como segue: sexa $x \in \mathrm{Cl}(E)$, U unha veciñanza de x. Como $\mathrm{Cl}(E) \subset \mathrm{Cl}(X - \mathrm{Cl}(E))$, $U \cap (X - \mathrm{Cl}(E)) \neq \emptyset$; logo $U \not\subseteq \mathrm{Cl}(E)$ e, pois, $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(E)) = \emptyset$.