...para abrir boca

12/18/19 de setembro de 2017

Para estas primeiras cuestións, referentes á topoloxía dos espazos euclidianos, podes encontrar información en: https://topoloxia.com/topoloxia-xeral/espazos-euclidianos/

Topoloxía dos espazos euclidianos

1.1 Definide *conxunto aberto* en $\mathbb{R}^2$

1. Demostrade que a intersección de dous conxuntos abertos é un conxunto aberto
2. É certa a anterior afirmación para unha colección arbitraria?
3. Pode unha intersección infinita e non baleira de conxuntos abertos ser un conxunto aberto?
4. Pode un conxunto aberto e non baleiro de $\mathbb{R}^2$ ser intersección infinita de conxuntos pechados?

1.2 Sexan $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ subespazos, $f\colon X \to Y$ unha función. Definide continuidade e continuidade secuencial. Son nocións equivalentes?

1.3 Sexa $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función polinomial. Demostrade que é continua.

1.4 Demostrade que unha función $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ é continua sse (se, e só se) cada composición $f_i = pr_i \circ f$ coas proxeccións coordenadas, $pr_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, é continua.

1.5 Construíde unha función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sexa continua en todo $\mathbb{R}$ menos nos puntos racionais diferentes do 0.

1.6 Construíde unha función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que só sexa continua nun punto.

1.7 Sexa $X \subset \mathbb{R}$. É X homeomorfo a $X \times X$? Discutide a resposta nos seguintes casos:

$$a)\ X = \{1, 2, \dots, n\}\,, \quad b)\ X = \mathbb{Z}\,, \quad c)\ X = \mathbb{Q}\,, \quad d)\ X = \mathbb{R}\,.$$

Cos coñecementos adquiridos na materia *Topoloxía dos espazos euclidianos* sería razoábel contestar a estes casos, agás o c), que require un argumento máis elaborado.

1.8 Utilizando converxencia de sucesións demostrade o seguinte resultado clásico:

Toda función real continua, f, con dominio un intervalos pechado,

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

alcanza o máximo, o mínimo e calquera valor intermedio.

A distancia euclidiana

1.9 Sexan x, y e z tres puntos distintos de $\mathbb{R}^2$. Probade que se verifica

$$d(x,z) \;=\; d(x,y) \;+\; d(y,z)$$

sse os puntos x, y e z son colineares, con y pertencente ao segmento determinado por x e z.

1.10 Sexa $A \subset \mathbb{R}^n$. Demostrade a relación

$$| \, d(x,A) \, - \, d(y,A) \, | \leq \, d(x,y) \, ,$$

para puntos calquera $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Topoloxías

1.11 Existe algunha topoloxía en $X = \{a,b,c\}$, distinta da discreta e a trivial, na que os conxuntos abertos e os conxuntos pechados coincidan?

1.12 Definamos en $\mathbb{R}$ unha colección $\tau = \{\mathbb{R}\} \cup \{U \subset \mathbb{R} | \ \mathbb{R} - U$ é infinito$\}$. Define τ unha topoloxía?

1.13 Considerade a colección de subconxuntos de $\mathbb{R}^2$ da forma $U \times V$, sendo U e V subconxuntos abertos de $\mathbb{R}$ coa topoloxía usual. É unha topoloxía en $\mathbb{R}^2$?

1.14 Nun conxunto X consideremos dúas topoloxías τ_1 e τ_2. Estudade se a intersección das dúas é unha topoloxía. E a unión? (Unión e intersección no conxunto $\mathbf{P}(X)$ de partes de X; $\tau_1, \tau_2 \subset \mathbf{P}(X)$).

Bases

1.15 Probade que a familia $\{(q,\infty), q \in \mathbb{Q}\}$ é base da topoloxía de Kolmogorov en $\mathbb{R}$.

1.16 Probade que a seguinte colección,

$$\{B_2((p,q), 1/n) \mid p,q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\} \, ,$$

é base da topoloxía usual de $\mathbb{R}^2$. Observade que se trata dunha colección enumerábel.

1.17 Demostrade que a familia $\beta = \{[a,b] \subset \mathbb{R} | \ a < b, \ a \in \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}\}$ é base dunha topoloxía en $\mathbb{R}$. Estudade o carácter aberto ou pechado, na topoloxía resultante, dos diversos intervalos e semirectas.