Espazos topolóxicos

25/26 de setembro de 2017

Veciñanzas

2.1 Sexa $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{K}})$ a recta de Kolmogoroff. Probade que toda veciñanza do 0 contén un conxunto da forma $(-1/n, +\infty)$.

Topoloxía da orde

Sexa X un conxunto totalmente ordenado. Designemos por a e b os elementos mínimo e máximo de X, $a = \min X$, $b = \max X$, caso de existiren. Considerando a definición habitual de intervalo nun conxunto ordenado, compróbase sen dificultade que a seguinte colección é base para unha topoloxía en X :

$$\beta = \{[a, x), x \neq a, x \in X\} \cup \{(x, y), x < y, x, y \in X\} \cup \{(x, b],\ x \neq b,\ x \in X\}\,.$$

Chámase *topoloxía da orde*. Por exemplo, a topoloxía usual de $\mathbb{R}$ é a topoloxía da orde asociada á relación de orde numérica.

Un conxunto ordenado provisto da topoloxía da orde denomínase *espazo ordenado*.

2.2 (E 3) Considerade o subconxunto de $\mathbb{R}$

$$X \;=\; [0, 1] \cup \{2\} \cup (3, 4)\,.$$

Utilizando a orde numérica, sexa τ_X a topoloxía da orde en X. Atopade bases de veciñanzas nos puntos 1 e 2.

Interior, adherencia, fronteira

2.3 (E 5) Calculade interior, adherencia, fronteira, conxunto derivado e puntos illados dos seguintes subconxuntos da recta de Kolmogoroff:

$$\mathbb{Z}; \quad (-3, 3]; \quad [5, +\infty); \quad (-\infty, 5); \quad \{1/n,\ n = 1, 2, 3, \dots\}; \quad \{5\}.$$

2.4 Calculade a adherencia dos seguintes subconxuntos da recta de Sorgenfrey:

$$\mathbb{Q}, \quad \{1/n, n = 1, 2, 3 \dots\}, \quad \{-1/n, n = 1, 2, 3 \dots\}, \quad (0, 1), \quad [8, 15)\,.$$

2.5 Sexan $A \;=\; \{a_n,\ n = 1, 2, 3, \dots\}$ e $B \;=\; \{b_n,\ n = 1, 2, 3, \dots\}$ dous conxuntos numerábeis, $X \;=\; A \cup B$. Definimos en X a seguinte relación de orde:

$$a_n < b_m \quad \text{para todo par} \quad n\,,\, m \in \mathbb{N}\,,$$

$$a_n < a_m \quad \text{sse} \quad n < m\,, \qquad b_n < b_m \quad \text{sse} \quad n < m\,.$$

Considérase en X a topoloxía da orde. Calculade:

$$\mathrm{Int}(A),\ \mathrm{Cl}(A),\ \mathrm{Fr}(A),\ \mathrm{Int}(B),\ \mathrm{Cl}(B) \text{ e } \mathrm{Fr}(B)\,.$$

2.6 Sexan A e B dous conxuntos nun espazo topolóxico X. Verificade:

1. $\mathrm{Int}[\mathrm{Int}(A)] \;=\; \mathrm{Int}(A)\,,$
2. $\mathrm{Int}(A \cap B) \;=\; \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)\,,$
3. $\mathrm{Int}(A \cup B) \;\supset\; \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)\,.$

2.7 (E 4) Sexan A e B dous conxuntos nun espazo topolóxico X. Verificade:

1. $\mathrm{Cl}[\mathrm{Cl}(A)] \;=\; \mathrm{Cl}(A)\,,$
2. $\mathrm{Cl}(A \cup B) \;=\; \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)\,,$
3. $\mathrm{Cl}(A \cap B) \;\subset\; \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)\,.$

2.8 Sexan A e B dous conxuntos nun espazo X. Demostrade que

$$\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)\,.$$

Dade un exemplo no que a igualdade non se cumpra.

2.9 Sexa X un espazo topolóxico, E un subconxunto de X.

1. Demostrade que E é aberto sse $E \cap \mathrm{Fr}(E) \;=\; \emptyset$.
2. Demostrade que E é pechado sse $\mathrm{Fr}(E) \;\subset E$.

2.10 Atopade dous conxuntos abertos U e V en $(\mathbb{R},\, \tau_u)$ tales que os catro conxuntos

$$U \cap \mathrm{Cl}(V), \quad \mathrm{Cl}(U) \cap V, \quad \mathrm{Cl}(U) \cap \mathrm{Cl}(V) \quad \text{e} \quad \mathrm{Cl}(U \cap V)$$

sexan distintos.

2.11 Sexa (X, τ) un espazo topolóxico, A e B subconxuntos de X. Demostrade que se se verificar $\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B) \;= \emptyset$, daquela $\mathrm{Int}\,(A \cup B) \;=\; \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$.

2.12 (E 1) Sexa X un espazo topolóxico, A un subconxunto de X. Demostrade que se A é aberto, daquela $\mathrm{Fr}(A)$ é un conxunto con interior baleiro. ¿É certo se A é pechado? Pon un contraexemplo no caso de A arbitrario.

2.13 (E 2) Sexa (X, τ) un espazo topolóxico tal que cada conxunto dun só punto, $\{x\}$, sexa pechado. Demostrade que o conxunto derivado de calquera subconxunto de X é pechado. É certa esta propiedade para un espazo topolóxico arbitrario?

Comparación de topoloxías

2.14 Comparade as diferentes topoloxías que coñezades en $\mathbb{R}$.

2.15 No subconxunto $X = [0,1] \cup \{2\} \cup (3,4)$ de $\mathbb{R}$, comparade a topoloxía usual coa topoloxía definida pola relación de orde (Exercicio 2.2).

2.16 Sexa $\mathbf{\Gamma}$ o Plano de Moore. Comparade a topoloxía de $\mathbf{\Gamma}$ coa topoloxía usual no mesmo conxunto.