Exposición: **Xeración de topoloxías** [Equipo 1] 2/3 de outubro de 2017

Referencia: [4].

O operador adherencia de Kuratowski

Un operador de Kuratowski nun conxunto X é unha aplicación do conxunto de partes de X en si mesmo,

$$(\ )^k \colon \mathbf{P}(X) \longrightarrow \mathbf{P}(X)$$

que verifica as seguintes propiedades:

1. $\emptyset^k = \emptyset$
2. $E \subset E^k$
3. $(E^k)^k = E^k$
4. $(A \cup B)^k = A^k \cup B^k$

onde A, B e E son subconxuntos de X.

3.1 Exercicio Sexan A, B subconxuntos de X, $(\ )^k$ un operador de Kuratowski en X. Usando a propiedade 4. da definición, demostrade:

$$A \subset B \Rightarrow A^k \subset B^k .$$

3.2 Teorema Dado un operador de Kuratowski en X, a colección $\mathcal{F} = \{A \subset X \mid A^k = A\}$ é a familia de conxuntos pechados para unha topoloxía en X. Ademais, para esta topoloxía, $\mathrm{Cl}(E) = E^k$.

3.3 Exercicio En $\mathbb{N}$ definimos $\emptyset^k = \emptyset$; se E é limitado e non baleiro, $E^k = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, onde n é o máximo de E; $E^k = \mathbb{N}$ se E non é limitado. Comprobade que é un operador de Kuratowski. Calculade o conxunto derivado de $\{m\}$ na topoloxía resultante.

O operador interior

Un *operador interior* nun conxunto X é unha aplicación do conxunto de partes de X en si mesmo,

$$(\ )^i \colon \mathbf{P}(X) \longrightarrow \mathbf{P}(X)$$

que verifica as seguintes propiedades:

1. $X^i = X$
2. $E^i \subset E$
3. $(E^i)^i = E^i$
4. $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$

onde A, B e E son subconxuntos de X.

3.4 Teorema A colección $\tau = \{U \subset X \mid U^i = U\}$ define unha topoloxía en X. Para $E \subset X$, en esta topoloxía $\mathrm{Int}(E) = E^i$.

3.5 Exercicio En $\mathbb{N}$ definimos o seguinte operador: para un subconxunto E non baleiro e diferente de $\mathbb{N}$, $E^i = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, se $n+1$ é o menor enteiro que non pertence a E. $\emptyset^i = \emptyset$ e $\mathbb{N}^i = \mathbb{N}$. Comprobade que é un operador interior. Calculade o conxunto derivado de $\{m\}$ na topoloxía resultante.

Converxencia de sucesións

En $\mathbb{R}^2$, en $\mathbb{R}^n$ en xeral, pódese determinar a topoloxía usual utilizando coverxencia de sucesións. Historicamente foi a ferramenta máis utilizada. Máis adiante veremos que non sempre permite caracterizar a topoloxía dun espazo.

Sexa $E \subset \mathbb{R}^2$. Diremos que E é un *conxunto pechado* en $\mathbb{R}^2$ se toda sucesión converxente contida en E, $\{x_n\} \subset E$, converxe a un punto de E.

3.6 Exercicio

1. Comprobade que a familia de subconxuntos de $\mathbb{R}^2$ así definida verifica os catro axiomas dos conxuntos pechados.

2. Demostrade que E é un subconxunto pechado de $\mathbb{R}^2$ coa topoloxía usual sse é pechado coa definición anterior.

Subbases

3.7 Teorema e Definición Dado un conxunto X é unha familia arbitraria de partes de X, $\Sigma \subset \mathbf{P}(X)$, existe unha topoloxía, τ_Σ, que é a menos fina que contén a Σ. Diremos que é a topoloxía *xerada* pola familia Σ. Unha base desta topoloxía está formada polas interseccións finitas de conxuntos de Σ.

Dada unha topoloxía, unha familia Σ de conxuntos abertos con esta propiedade denomínase *subbase* da topoloxía.

3.8 Exercicio Sexan $pr_i \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, as proxeccións coordenadas de $\mathbb{R}^2$. Demostrade que a colección

$$\Sigma = \{pr_i^{-1}((a, b)),\, a < b,\, i = 1, 2\},$$

é subbase da topoloxía usual de $\mathbb{R}^2$.

Este exemplo importante pódese xeneralizar da sguinte maneira:

3.9 Topoloxía inicial Sexa $\{(X_\lambda, \tau_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ unha familia de espazos topolóxicos. Sexa Z un conxunto; e, para cada $\lambda \in \Lambda$, sexa

$$h_\lambda \colon Z \longrightarrow X_\lambda$$

unha función. Considerade en Z a colección de subconxuntos

$$\{h_\lambda^{-1}(V),\, V \in \tau_\lambda\}.$$

Sexa τ_Z a topoloxía xerada por esta familia de conxuntos. Probade:

1. τ_Z é a topoloxía menos fina para a que todas as funcións h_λ son continuas.

2. Se (Y, τ_Y) é un espazo topolóxico, unha función $f \colon (Y, \tau_Y) \to (Z, \tau_Z)$ é continua sse cada composición $h_\lambda \circ f$, $\lambda \in \Lambda$, é continua.