Continuidade

9/10 de outubro de 2017

4.1 Estudade a continuidade das aplicacións f, g, e h da recta de Kolmogoroff en si mesma dadas por:

$$f(x) = -|x|, \quad g(x) = -x \;\text{ e }\; h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0, \\ 2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

4.2 (E 3) Sexa X un espazo topolóxico, $E \subset X$. Definimos a *función característica* de E,

$$\chi_E \colon X \to \{0,1\},$$

por:

$$\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E, \end{cases}$$

considerando en $\{0,1\}$ a topoloxía discreta.

1. Demostrade que χ_E é continua nun punto x sse $x \notin \mathrm{Fr}(E)$.
2. Demostrade que é continua en todo X sse E é ao tempo aberto e pechado.

4.3 (E 2) Describide o conxunto $\mathrm{Map}(X, \mathcal{S})$ de funcións continuas con dominio un espazo topolóxico (X, τ_X) e rango os espazo de Sierpinski $\mathcal{S}$.

4.4 Demostrade que un espazo topolóxico X ten a topoloxía discreta sse para todo espazo topolóxico Y toda aplicación $f \colon X \to Y$ é continua.

Demostrade que un espazo topolóxico X ten a topoloxía trivial sse para todo espazo topolóxico Y toda aplicación $f \colon Y \to X$ é continua.

4.5 (E 4) Sexa

$$\beta = \{[a, +\infty),\, a \in \mathbb{R}\}.$$

1. Comprobade que β é base para algunha topoloxía τ en $\mathbb{R}$.
2. Comparade a topoloxía τ resultante coa topoloxía $\tau_{\mathcal{K}}$ de Kolmogorov.
3. Estudade a continuidade da función $f \colon (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau)$ dada por $f(x) = x^2$.

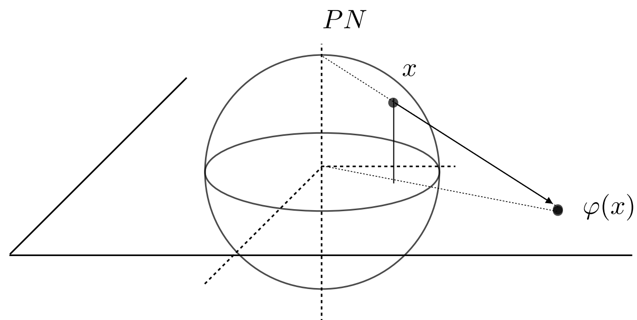
4.6 Consideremos nun conxunto X dúas topoloxías τ_1 e τ_2. Demostrade que τ_1 é máis fina que τ_2 sse a identidade $id_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ é continua.

4.7 Sexan X e Y espazos topolóxicos, $f \colon X \to Y$ unha aplicación arbitraria. Demostrade:

1. f é aberta sse $f(\mathrm{Int}(A)) \subset \mathrm{Int}(f(A))$ para todo $A \subset X$.
2. f é pechada sse $f(\mathrm{Cl}(A)) \supset \mathrm{Cl}(f(A))$ para todo $A \subset X$.

4.8 Demostrade que $\mathbb{R}$ coa topoloxía usual non é homeomorfa a $\mathbb{R}$ coa topoloxía cofinita.

4.9 A proxección dende o polo norte, PN, da esfera sobre o espazo euclidiano determina un homeomorfismo $\varphi\colon \mathbb{S}^n - \{PN\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Denomínase *proxección estereográfica*. Definide a aplicación φ e demostrade que é un homeomorfismo.



4.10 Sexa Δ^2 o 2-*simplex xeométrico standard,*

$$\Delta^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_0 + x_1 + x_2 = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 0, 1, 2\}\,.$$

Probade que, coa topoloxía usual, Δ^2 é homeomorfo a I^2.

4.11 (E 5) Considerando a topoloxía usual no dominio e no rango, estudade se a seguinte aplicación é un mergullo:

$$h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad h(x) = \begin{cases} (x+1, 0) & \text{se } x \leq 0 \\ (\cos \dfrac{\pi x}{1+x}, \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{1+x}) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

4.12 Demostrade que a composición de mergullos é un mergullo.

4.13 Dado un espazo topolóxico X, sexa $\mathcal{H}(X)$ o conxunto dos homeomorfismos de X en si mesmo. Probade que $\mathcal{H}(X)$ é un grupo, coa composición de aplicacións coma operación. Chámase *grupo dos homeomorfismos* de X. Calculade $\mathcal{H}(S)$, onde S é o espazo de Sierpinski.

4.14 Sexan X e Y espazos topolóxicos. Unha aplicación $h\colon X \to Y$ é un *homeomorfismo local* se para cada punto x de X existe unha veciñanza aberta U de x e unha veciñanza aberta V de $h(x)$ tal que a aplicación $h\,|_U$ defina un homeomorfismo entre U e V.

1. Probade que un homeomorfismo local é unha aplicación continua e aberta
2. Estudade se a aplicación exponencial,

   $$\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1\,,$$

   dada por $\exp(t) = e^{2\pi i t}$, é un homeomorfismo local.

Subespazos

4.15 (E 1) Dado un espazo topolóxico X e un subconxunto E, se a topoloxía inducida en E é a discreta dise que E é un subespazo discreto.

1. Dade un exemplo de subespazo discreto de $\mathbb{R}$ coa topoloxía usual que non sexa pechado.
2. Dotamos a $\mathbb{Q}$ coa topoloxía relativa inducida pola de Sorgenfrey de $\mathbb{R}$. Consideramos o subconxunto $A = [-\pi,\, \pi] \cap \mathbb{Q}$. É A aberto ou pechado en $\mathbb{Q}$? É a topoloxía de $\mathbb{Q}$ a discreta?