Tema 2. Continuidade

Topoloxía Xeral, 2017-18

Índice

Definición

Sexan (X, τ_X) *e* (Y, τ_Y) *espazos topolóxicos. Diremos que unha aplicación* $f : X \to Y$ *é* continua *nun punto* x_0 *do seu dominio se se verifica calquera das seguintes condicións:*

- *Para toda veciñanza* V *de* $f(x_0)$ *existe unha veciñanza* U *de* x_0 *tal que* $f(U) \subset V$.
- *Para toda veciñanza* V *de* $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ *é unha veciñanza de* x_0 .

Diremos que f *é unha* aplicación continua *se é continua en todos os puntos do seu dominio.*

Definición

Sexan (X, τ_X) *e* (Y, τ_Y) *espazos topolóxicos. Diremos que unha aplicación* $f : X \to Y$ *é* continua *nun punto* x_0 *do seu dominio se se verifica calquera das seguintes condicións:*

- *Para toda veciñanza* V *de* $f(x_0)$ *existe unha veciñanza* U *de* x_0 *tal que* $f(U) \subset V$ *.*
- *Para toda veciñanza* V *de* $f(x_0)$ *,* $f^{-1}(V)$ *é unha veciñanza de* x_0 *.*

Diremos que f *é unha* aplicación continua *se é continua en todos os puntos do seu dominio.*

Definición

Sexan (X, τ_X) *e* (Y, τ_Y) *espazos topolóxicos. Diremos que unha aplicación* $f : X \to Y$ *é* continua *nun punto* x_0 *do seu dominio se se verifica calquera das seguintes condicións:*

- *Para toda veciñanza* V *de* $f(x_0)$ *existe unha veciñanza* U *de* x_0 *tal que* $f(U) \subset V$.
- *Para toda veciñanza* V *de* $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ *é unha veciñanza de* x_0 .

Diremos que f *é unha* aplicación continua *se é continua en todos os puntos do seu dominio.*

Dados espazos topolóxicos X e Y, o conxunto de aplicacións continuas de dominio X e rango Y denótase

$$\boxed{\mathrm{Map}\,(X, Y)}$$

A aplicación identidade,

$$id_X : (X, \tau_X) \longrightarrow (X, \tau_X)\,,$$

é continua.

Teorema

Sexan X, Y *e* Z *espazos topolóxicos,* $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$. *Sexan* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$ *aplicacións. Se* f *é continua en* x_0 *e* g *é continua en* y_0, *daquela a composición* $g \circ f$ *é continua en* x_0.

En particular, a composición de aplicacións continuas é unha aplicación continua.

Teorema

Sexan X, Y e Z espazos topolóxicos, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$. Sexan $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ aplicacións. Se f é continua en x_0 e g é continua en y_0, daquela a composición $g \circ f$ é continua en x_0.

En particular, a composición de aplicacións continuas é unha aplicación continua.

Teorema

Dados espazos topolóxicos (X, τ_X) *e* (Y, τ_Y) *e unha aplicación* $f : X \to Y$, *as seguintes condicións son equivalentes:*

1. f *é continua.*
2. *Para cada* $V \in \tau_Y$, $f^{-1}(V) \in \tau_X$.
3. *Fixada unha base da topoloxía de* Y, *a imaxe recíproca de cada aberto básico é un aberto de* X.
4. *Se* F *é un conxunto pechado de* Y, $f^{-1}(F)$ *é un conxunto pechado de* X.
5. *Se* $E \subset X$, $f(\mathrm{Cl}(E)) \subset \mathrm{Cl}(f(E))$.

Índice

Definición

Sexa (X, τ) *un espazo topolóxico,* E *un subconxunto de* X*. A colección de interseccións de abertos de* X *con* E *forman unha topoloxía* τ_E *en* E*, denominada* topoloxía relativa,

$$\boxed{\tau_E = \{U \subset E \mid \exists V \in \tau, U = V \cap E\}.}$$

O espazo topolóxico resultante, (E, τ_E)*, denomínase* subespazo *de* X*.*

Definición

Sexa (X, τ) *un espazo topolóxico,* E *un subconxunto de* X*. A colección de interseccións de abertos de* X *con* E *forman unha topoloxía* τ_E *en* E*, denominada* topoloxía relativa,

$$\boxed{\tau_E = \{U \subset E \mid \exists V \in \tau, U = V \cap E\}.}$$

O espazo topolóxico resultante, (E, τ_E)*, denomínase* subespazo *de* X*.*

Aplicación inclusión

Sexa (X, τ) un espazo topolóxico, E un subespazo. A aplicación inclusión

$$i\colon E \longrightarrow X$$

é continua.

Proposición

Sexa E un subespazo de X. Se β é unha base da topoloxía de X, daquela a colección

$$\boxed{\beta_E = \{V \cap E,\ V \in \beta, V \cap E \neq \emptyset\}}$$

é unha base da topoloxía de E.

Sexa E un subespazo de $X,\ A \subset E$. Conservando a notación $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Cl}(A)$ e $\mathrm{Fr}(A)$ para interior, adherencia e fronteira en X, denotaremos por

$$\mathrm{Int}_E(A), \quad \mathrm{Cl}_E(A) \quad \text{e} \quad \mathrm{Fr}_E(A)$$

os respectivos conceptos en E.

Proposición

Sexa $A \subset E \subset X$.

1. $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}_E(A)$
2. $\mathrm{Cl}(A) \cap E = \mathrm{Cl}_E(A)$
3. $\mathrm{Fr}_E(A) \subset \mathrm{Fr}(A)$

Sexa E un subespazo de $X,\ A \subset E$. Conservando a notación $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Cl}(A)$ e $\mathrm{Fr}(A)$ para interior, adherencia e fronteira en X, denotaremos por

$$\mathrm{Int}_E(A), \quad \mathrm{Cl}_E(A) \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{Fr}_E(A)$$

os respectivos conceptos en E.

Proposición

Sexa $A \subset E \subset X$.

1. $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}_E(A)$
2. $\mathrm{Cl}(A) \cap E = \mathrm{Cl}_E(A)$
3. $\mathrm{Fr}_E(A) \subset \mathrm{Fr}(A)$

Restrición

Sexa $f : X \to Y$ unha aplicación, E un subespazo de X, $i : E \to X$ a inclusión. A *restrición* de f a E,

$$f\,|_E = f \circ i : E \to Y\,,$$

é continua, como composición de dúas aplicacións continuas.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f\,|_E"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Restrición

Sexa $f : X \to Y$ unha aplicación, E un subespazo de X, $i : E \to X$ a inclusión. A *restrición* de f a E,

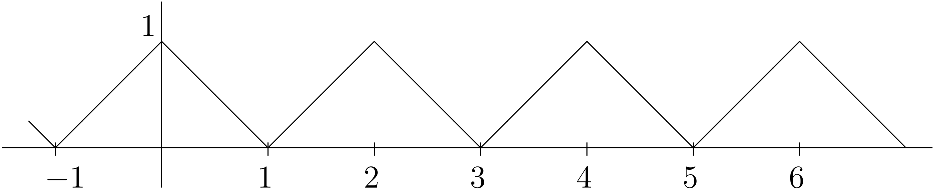
$$f\,|_E = f \circ i : E \to Y\,,$$

é continua, como composición de dúas aplicacións continuas.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "f\,|_E"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\
& X \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Se a restrición ao subespazo E é continua, a función $f\colon X \to Y$ é continua nos puntos de E?

Función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con grafo:



Definimos funcións $f_n, n \in \mathbb{Z}$, en cada aberto $U_n = (n-1, n+1)$:

$$f_{2n}(x) = 1 - |2n - x| \quad \text{e} \quad f_{2n+1}(x) = |2n+1-x|\,,$$

e a función f por:

$$\boxed{f(x) = f_n(x) \quad \text{se} \quad x \in U_n\,.}$$

Sexan X e Y conxuntos, $\{A_i,\ i \in I\}$ unha cobertura de X con índices nun conxunto I, $\{f_i : A_i \to Y,\ i \in I\}$ unha familia de aplicacións tales que

$$\boxed{f_i \mid_{A_i \cap A_j} = f_j \mid_{A_i \cap A_j}}$$

para todo par de índices $i, j \in I$. Definimos unha nova aplicación $f : X \to Y$ da seguinte maneira:

$$\boxed{f(x) \ = \ f_i(x) \text{ se } x \in A_i \,.}$$

Esta aplicación denomínase *aplicación combinada* da familia $\{f_i\}$.

Proposición

- *A aplicación combinada dunha familia de aplicacións continuas tales que os seus dominios formen unha cobertura aberta dun espazo X é unha aplicación continua.*
- *A aplicación combinada dunha familia de aplicacións continuas tales que os seus dominios formen unha cobertura pechada e finita dun espazo X é unha aplicación continua.*

Proposición

- *A aplicación combinada dunha familia de aplicacións continuas tales que os seus dominios formen unha cobertura aberta dun espazo* X *é unha aplicación continua.*
- *A aplicación combinada dunha familia de aplicacións continuas tales que os seus dominios formen unha cobertura pechada e finita dun espazo* X *é unha aplicación continua.*

Índice