Tema 1. Espazos topolóxicos

Topoloxía Xeral, 2017-18

Índice

Definición

Unha topoloxía τ nun conxunto X é unha colección de partes de X que verifica os catro *axiomas* seguintes:

$\tau 1$ O conxunto total X pertence a τ.

$\tau 2$ O conxunto baleiro $\emptyset$ pertence a τ.

$\tau 3$ Se $U_\lambda \in \tau$, con $\lambda \in \Lambda$, entón a súa unión

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

tamén pertence a τ.

$\tau 4$ Se U e V pertencen a τ, $U \cap V$ tamén.

Definición

Unha topoloxía τ nun conxunto X é unha colección de partes de X que verifica os catro *axiomas* seguintes:

$\tau 1$ O conxunto total X pertence a τ.

$\tau 2$ O conxunto baleiro $\emptyset$ pertence a τ.

$\tau 3$ Se $U_\lambda \in \tau$, con $\lambda \in \Lambda$, entón a súa unión

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

tamén pertence a τ.

$\tau 4$ Se U e V pertencen a τ, $U \cap V$ tamén.

Definición

Unha topoloxía τ nun conxunto X é unha colección de partes de X que verifica os catro *axiomas* seguintes:

$\tau 1$ O conxunto total X pertence a τ.

$\tau 2$ O conxunto baleiro $\emptyset$ pertence a τ.

$\tau 3$ Se $U_\lambda \in \tau$, con $\lambda \in \Lambda$, entón a súa unión

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

tamén pertence a τ.

$\tau 4$ Se U e V pertencen a τ, $U \cap V$ tamén.

Definición

Unha topoloxía τ nun conxunto X é unha colección de partes de X que verifica os catro *axiomas* seguintes:

$\tau 1$ O conxunto total X pertence a τ.

$\tau 2$ O conxunto baleiro $\emptyset$ pertence a τ.

$\tau 3$ Se $U_\lambda \in \tau$, con $\lambda \in \Lambda$, entón a súa unión
$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$
tamén pertence a τ.

$\tau 4$ Se U e V pertencen a τ, $U \cap V$ tamén.

Definición

Unha topoloxía τ nun conxunto X é unha colección de partes de X que verifica os catro *axiomas* seguintes:

- $\tau 1$ O conxunto total X pertence a τ.
- $\tau 2$ O conxunto baleiro $\emptyset$ pertence a τ.
- $\tau 3$ Se $U_\lambda \in \tau$, con $\lambda \in \Lambda$, entón a súa unión
$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$
tamén pertence a τ.
- $\tau 4$ Se U e V pertencen a τ, $U \cap V$ tamén.

- Dada unha topoloxía τ nun conxunto X, o duplo (X, τ) chámase *espazo topolóxico*.
- Os conxuntos da topoloxía chámanse *conxuntos abertos*.

- Dada unha topoloxía τ nun conxunto X, o duplo (X, τ) chámase *espazo topolóxico*.
- Os conxuntos da topoloxía chámanse *conxuntos abertos*.

Topoloxía usual

A colección dos conxuntos abertos do espazo euclidiano foi o modelo para definir topoloxía. Denomínase *topoloxía usual* e denótase τ_u.

Topoloxía discreta e topoloxía trivial

- Para calquera conxunto X a familia $\tau = \mathbf{P}(X)$ de partes de X define a *topoloxía discreta*. Un espazo coa topoloxía discreta chamarase *espazo discreto*.
- A familia $\tau = \{\emptyset, X\}$ define a *topoloxía trivial* (ou *topoloxía indiscreta*). Un espazo coa topoloxía trivial dirase *espazo trivial*.

Topoloxía discreta e topoloxía trivial

- Para calquera conxunto X a familia $\tau = \mathbf{P}(X)$ de partes de X define a *topoloxía discreta*. Un espazo coa topoloxía discreta chamarase *espazo discreto*.
- A familia $\tau = \{\emptyset, X\}$ define a *topoloxía trivial* (ou *topoloxía indiscreta*). Un espazo coa topoloxía trivial dirase *espazo trivial*.

Espazo de Sierpinski

Sexa $S = \{0, 1\}$. $\tau = \{S, \emptyset, \{0\}\}$ é unha topoloxía en S. Con esta topoloxía S chámase *espazo de Sierpinski*.

Sexa $X = \{a, b, c\}$.

- $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ é unha topoloxía.
- Pola contra, a colección $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ non é unha topoloxía.

Espazo de Sierpinski

Sexa $S = \{0, 1\}$. $\tau = \{S, \emptyset, \{0\}\}$ é unha topoloxía en S. Con esta topoloxía S chámase *espazo de Sierpinski*.

Sexa $X = \{a, b, c\}$.

- $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ é unha topoloxía.
- Pola contra, a colección $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ non é unha topoloxía.

Espazo de Sierpinski

Sexa $S = \{0, 1\}$. $\tau = \{S, \emptyset, \{0\}\}$ é unha topoloxía en S. Con esta topoloxía S chámase *espazo de Sierpinski*.

Sexa $X = \{a, b, c\}$.

- $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ é unha topoloxía.
- Pola contra, a colección $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ non é unha topoloxía.

Espazo de Sierpinski

Sexa $S = \{0, 1\}$. $\tau = \{S, \emptyset, \{0\}\}$ é unha topoloxía en S. Con esta topoloxía S chámase *espazo de Sierpinski*.

Sexa $X = \{a, b, c\}$.

- $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ é unha topoloxía.
- Pola contra, a colección $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ non é unha topoloxía.

Recta de Kolmogoroff

En $\mathbb{R}$ a colección

$$\tau_{\mathcal{K}} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty), \ a \in \mathbb{R}\}$$

é unha topoloxía. $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{K}})$ denomínase *recta de Kolmogoroff*.

Índice

Definición

Dado un espazo topolóxico (X, τ) chámanse *conxuntos pechados* a aqueles conxuntos tales que o seu complementar é aberto.

Teorema (As catro propiedades dos conxuntos pechados)

Nun espazo topolóxico (X, τ) os conxuntos pechados teñen as seguintes propiedades:

- F1 O conxunto baleiro $\emptyset$ é pechado.
- F2 O espazo total X é pechado.
- F3 A intersección dunha familia arbitraria de conxuntos pechados é un conxunto pechado.
- F4 A unión de dous conxuntos pechados é un conxunto pechado.

Ademais, dado un conxunto X e unha familia de partes de X que verifique estas catro propiedades, esta familia é a colección de conxuntos pechados para unha topoloxía en X.

Topoloxía cofinita

Sexa $\mathcal{F}$ a colección de subconxuntos de $\mathbb{R}$ formada polos conxuntos finitos e o propio $\mathbb{R}$. Verifica as catro propiedades dos conxuntos pechados, definindo a chamada *topoloxía cofinita*, τ_{co}: os conxuntos abertos son o baleiro e aqueles con complementar finito.

Defínese en calquera conxunto infinito X (se o conxunto fora finito a topoloxía así definida coincidiría coa discreta!).

Topoloxía cofinita

Sexa $\mathcal{F}$ a colección de subconxuntos de $\mathbb{R}$ formada polos conxuntos finitos e o propio $\mathbb{R}$. Verifica as catro propiedades dos conxuntos pechados, definindo a chamada *topoloxía cofinita*, τ_{co}: os conxuntos abertos son o baleiro e aqueles con complementar finito.

Defínese en calquera conxunto infinito X (se o conxunto fora finito a topoloxía así definida coincidiría coa discreta!).

Topoloxía cocompacta

Considerade en $\mathbb{R}$ a familia formada polos conxuntos compactos coa topoloxía usual e máis a recta toda enteira. Verifica as catro propiedades dos conxuntos pechados, polo que determina unha topoloxía en $\mathbb{R}$, na que estes conxuntos son os pechados.

Índice

Definición

Chámase *base* dunha topoloxía a un subconxunto β de τ coa seguinte propiedade:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{dado } U \in \tau \text{ e } x \in U, \\ \\ \text{existe un } B \in \beta \text{ tal que } x \in B \text{ e } B \subset U\end{array}\right.$$

Fixada unha base β, os seus elementos chámanse *abertos básicos*.

Definición

Chámase *base* dunha topoloxía a un subconxunto β de τ coa seguinte propiedade:

$$\begin{cases} \text{dado } U \in \tau \text{ e } x \in U, \\ \\ \text{existe un } B \in \beta \text{ tal que } x \in B \text{ e } B \subset U \end{cases}$$

Fixada unha base β, os seus elementos chámanse *abertos básicos*.

Definición

Chámase *base* dunha topoloxía a un subconxunto β de τ coa seguinte propiedade:

$$\begin{cases} \text{dado } U \in \tau \text{ e } x \in U, \\ \\ \text{existe un } B \in \beta \text{ tal que } x \in B \text{ e } B \subset U \end{cases}$$

Fixada unha base β, os seus elementos chámanse *abertos básicos*.

Proposición

Sexa β base dunha topoloxía en X. As seguintes condicións son equivalentes:

1. $U \subset X$ é aberto.
2. Para cada punto x de U existe un aberto básico B tal que $x \in B \subset U$.
3. O conxunto U escríbese como unión de abertos básicos.

A condición $2.$,

> «para cada punto x de U existe un aberto básico B tal que $x \in B \subset U$»

significa que, en función da base β, a topoloxía é a colección

$$\boxed{\tau = \{U \subset X \mid x \in U \Rightarrow \exists B \in \beta,\, x \in B \subset U\}}$$

A condición $2.$,

> «para cada punto x de U existe un aberto básico B tal que $x \in B \subset U$»

significa que, en función da base β, a topoloxía é a colección

$$\boxed{\tau = \{U \subset X \mid x \in U \Rightarrow \exists B \in \beta,\, x \in B \subset U\}}$$

A condición $3.$,

> «o conxunto U escríbese como unión de abertos básicos»

significa que a topoloxía é a colección

$$\boxed{\tau = \{U \subset X \mid U = \cup_{\lambda \in \Lambda_U} B_\lambda,\ B_\lambda \in \beta\}\,.}$$

A condición $3.$,

> «o conxunto U escríbese como unión de abertos básicos»

significa que a topoloxía é a colección

$$\boxed{\tau = \{U \subset X \mid U = \cup_{\lambda \in \Lambda_U} B_\lambda,\ B_\lambda \in \beta\}.}$$

Exemplos de bases

- A familia $\{\{x\},\ x \in X\}$ é unha base para a topoloxía discreta en X.
- A colección $\{(p, q) \mid p < q,\ p, q \in \mathbb{Q}\}$ é unha base para a topoloxía usual en $\mathbb{R}$.
- A colección $\{(p, +\infty), p \in \mathbb{Q}\}$ é unha base para a topoloxía de Kolmogorov.

Exemplos de bases

- A familia $\{\{x\},\ x \in X\}$ é unha base para a topoloxía discreta en X.
- A colección $\{(p,q) \mid p < q,\ p,q \in \mathbb{Q}\}$ é unha base para a topoloxía usual en $\mathbb{R}$.
- A colección $\{(p,+\infty), p \in \mathbb{Q}\}$ é unha base para a topoloxía de Kolmogorov.

Exemplos de bases

- A familia $\{\{x\},\ x \in X\}$ é unha base para a topoloxía discreta en X.
- A colección $\{(p,q) \mid p < q,\ p,q \in \mathbb{Q}\}$ é unha base para a topoloxía usual en $\mathbb{R}$.
- A colección $\{(p,+\infty), p \in \mathbb{Q}\}$ é unha base para a topoloxía de Kolmogorov.

Teorema (condicións para ser base dalgunha topoloxía)

Dado un conxunto X e unha familia de subconxuntos β, β é base dalgunha topoloxía en X sse se cumpren as dúas condicións seguintes:

1. $\bigcup_{B \in \beta} B = X$
2. se $x \in B_1 \cap B_2$, sendo B_1 e B_2 elementos de β, existe un $B_3 \in \beta$ con $x \in B_3$ e $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Recta de Sorgenfrey.

A seguinte colección de subconxuntos de $\mathbb{R}$,

$$\beta_S = \{[x,y) \mid x < y,\ x,y \in \mathbb{R}\},$$

verifica as condicións anteriores, logo é base dunha topoloxía τ_S en $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R}, \tau_S)$ denomínase *recta de Sorgenfrey*.

Por contra, a colección $\{[x,y] \mid x < y,\ x,y \in \mathbb{R}\}$ non é base de ningunha topoloxía: para os conxuntos $[x,y]$ e $[y,z]$ non se verifica a segunda condición do teorema.

Recta de Sorgenfrey.

A seguinte colección de subconxuntos de $\mathbb{R}$,

$$\beta_S = \{[x, y) \mid x < y,\ x, y \in \mathbb{R}\},$$

verifica as condicións anteriores, logo é base dunha topoloxía τ_S en $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R}, \tau_S)$ denomínase *recta de Sorgenfrey*.

Por contra, a colección $\{[x, y] \mid x < y,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ non é base de ningunha topoloxía: para os conxuntos $[x, y]$ e $[y, z]$ non se verifica a segunda condición do teorema.

Recta de Sorgenfrey.

A seguinte colección de subconxuntos de $\mathbb{R}$,

$$\beta_S = \{[x, y) \mid x < y, \; x, y \in \mathbb{R}\},$$

verifica as condiciónss anteriores, logo é base dunha topoloxía τ_S en $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R}, \tau_S)$ denomínase *recta de Sorgenfrey*.

Por contra, a colección $\{[x, y] \mid x < y, \; x, y \in \mathbb{R}\}$ non é base de ningunha topoloxía: para os conxuntos $[x, y]$ e $[y, z]$ non se verifica a segunda condición do teorema.

Plano de Moore

Denotemos por Γ o semiplano superior pechado en $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{\Gamma} = \{(x,y) |\ y \geq 0\}.$$

Sexa

$$\beta = \{B_2((x,y),r) |\ y > 0, r \leq y\} \cup \{\{(x,0)\} \cup B_2((x,y),y) |\ y > 0\}.$$

É doado verificar que β é base dunha topoloxía en Γ. O espazo topolóxico resultante denomínase *plano de Moore*.

Índice

Definición

Unha *veciñanza* dun punto x nun espazo topolóxico X é un conxunto V que contén un subconxunto aberto contendo a x.

A colección $\mathcal{V}_x$ de todas as veciñanzas de x chámase *sistema de veciñanzas* de x.

$$\boxed{V \in \mathcal{V}_x \quad \Leftrightarrow \quad \exists U \in \tau\,,\; x \in U \subset V}$$

Definición

Unha *veciñanza* dun punto x nun espazo topolóxico X é un conxunto V que contén un subconxunto aberto contendo a x.

A colección $\mathcal{V}_x$ de todas as veciñanzas de x chámase *sistema de veciñanzas* de x.

$$\boxed{V \in \mathcal{V}_x \quad \Leftrightarrow \quad \exists U \in \tau\,,\; x \in U \subset V}$$

Definición

Unha *veciñanza* dun punto x nun espazo topolóxico X é un conxunto V que contén un subconxunto aberto contendo a x.

A colección $\mathcal{V}_x$ de todas as veciñanzas de x chámase *sistema de veciñanzas* de x.

$$\boxed{V \in \mathcal{V}_x \quad \Leftrightarrow \quad \exists U \in \tau\,,\ x \in U \subset V}$$

Exemplos e contra-exemplos

O conxunto $(x - 1/n,\ x + 1/n)$ é unha veciñanza de x en $\mathbb{R}$ coa topoloxía usual.

Tamén o son os conxuntos $[x - 1/n,\ x + 1/n)$, $[x - 1/n,\ x + 1/n]$ ou $\mathbb{R}$ todo enteiro.

Analogamente, $[x, y)$, con $y > x$, é unha veciñanza de x na recta de Sorgenfrey.

Por contra, o conxunto $\{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ non é veciñanza do 0 en ningunha destas topoloxías. E o conxunto $(-1, 0]$, tampouco.

Exemplos e contra-exemplos

O conxunto $(x - 1/n,\ x + 1/n)$ é unha veciñanza de x en $\mathbb{R}$ coa topoloxía usual.

Tamén o son os conxuntos $[x - 1/n,\ x + 1/n)$, $[x - 1/n,\ x + 1/n]$ ou $\mathbb{R}$ todo enteiro.

Analogamente, $[x, y)$, con $y > x$, é unha veciñanza de x na recta de Sorgenfrey.

Por contra, o conxunto $\{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ non é veciñanza do 0 en ningunha destas topoloxías. E o conxunto $(-1, 0]$, tampouco.

Exemplos e contra-exemplos

O conxunto $(x - 1/n,\, x + 1/n)$ é unha veciñanza de x en $\mathbb{R}$ coa topoloxía usual.

Tamén o son os conxuntos $[x - 1/n,\, x + 1/n)$, $[x - 1/n,\, x + 1/n]$ ou $\mathbb{R}$ todo enteiro.

Analogamente, $[x, y)$, con $y > x$, é unha veciñanza de x na recta de Sorgenfrey.

Por contra, o conxunto $\{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ non é veciñanza do 0 en ningunha destas topoloxías. E o conxunto $(-1, 0]$, tampouco.

Exemplos e contra-exemplos

O conxunto $(x - 1/n,\ x + 1/n)$ é unha veciñanza de x en $\mathbb{R}$ coa topoloxía usual.

Tamén o son os conxuntos $[x - 1/n,\ x + 1/n)$, $[x - 1/n,\ x + 1/n]$ ou $\mathbb{R}$ todo enteiro.

Analogamente, $[x, y)$, con $y > x$, é unha veciñanza de x na recta de Sorgenfrey.

Por contra, o conxunto $\{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ non é veciñanza do 0 en ningunha destas topoloxías. E o conxunto $(-1, 0]$, tampouco.

Proposición

A intersección finita de veciñanzas é unha veciñanza. Tamén, se $U \in \mathcal{V}_x$ e $V \supset U$, entón $V \in \mathcal{V}_x$.

Proposición

Un subconxunto U dun espazo topolóxico X é aberto sse é veciñanza de cada un dos seus puntos.

Definición

Unha *base de veciñanzas* ou *base local* de x nun espazo topolóxico X é unha subcolección β_x do sistema de veciñanzas $\mathcal{V}_x$, tendo a propiedade de que todo $V \in \mathcal{V}_x$ contén algún $B \in \beta_x$.

Fixada unha base de veciñanzas de x, os seus elementos son chamados veciñanzas básicas de x.

Definición

Unha *base de veciñanzas* ou *base local* de x nun espazo topolóxico X é unha subcolección β_x do sistema de veciñanzas $\mathcal{V}_x$, tendo a propiedade de que todo $V \in \mathcal{V}_x$ contén algún $B \in \beta_x$.

Fixada unha base de veciñanzas de x, os seus elementos son chamados veciñanzas básicas *de x.*

Exemplos

O prototipo de exemplo de base local nun punto vén dado polas bólas de centro ese punto nun espazo euclidiano.

Non é necesario consideralas todas: en $\mathbb{R}^p$ as bólas abertas $\{B_p(x, 1/n),\ n \in \mathbb{N}\}$ forman unha base local en x.

Analogamente, na recta de Sorgenfrey a colección $\{[x, x+1/n),\ n \in \mathbb{N}\}$ é unha base local en x.

Exemplos

O prototipo de exemplo de base local nun punto vén dado polas bólas de centro ese punto nun espazo euclidiano.

Non é necesario consideralas todas: en $\mathbb{R}^p$ as bólas abertas $\{B_p(x, 1/n),\ n \in \mathbb{N}\}$ forman unha base local en x.

Analogamente, na recta de Sorgenfrey a colección $\{[x, x+1/n),\ n \in \mathbb{N}\}$ é unha base local en x.

Exemplos

O prototipo de exemplo de base local nun punto vén dado polas bólas de centro ese punto nun espazo euclidiano.

Non é necesario consideralas todas: en $\mathbb{R}^p$ as bólas abertas $\{B_p(x, 1/n), \ n \in \mathbb{N}\}$ forman unha base local en x.

Analogamente, na recta de Sorgenfrey a colección $\{[x, x + 1/n), \ n \in \mathbb{N}\}$ é unha base local en x.

Lema

Sexa β base dunha topoloxía τ en X. Daquela, para cada punto $x \in X$ a colección $\beta_x = \{U \in \beta \mid x \in U\}$ é unha base local.

Reciprocamente, se para cada $x \in X$ temos unha base local β_x formada por conxuntos abertos, daquela

$$\boxed{\beta = \bigcup_{x \in X} \beta_x \,,}$$

é unha base da topoloxía de X.

Lema

Sexa β base dunha topoloxía τ en X. Daquela, para cada punto $x \in X$ a colección $\beta_x = \{U \in \beta \mid x \in U\}$ é unha base local.

Reciprocamente, se para cada $x \in X$ temos unha base local β_x formada por conxuntos abertos, daquela

$$\boxed{\beta = \bigcup_{x \in X} \beta_x \,,}$$

é unha base da topoloxía de X.

Proposición

Un subconxunto U dun espazo topolóxico X é aberto sse contén unha veciñanza básica de cada un dos seus puntos.

Índice

- Existe unha veciñanza V_x de x completamente contida en E, ou sexa,

$$\boxed{\exists V_x \in \mathcal{V}_x, \quad V_x \subset E\,.}$$

- Existe unha veciñanza V_x de x completamente contida no complementar de E, ou sexa,

$$\boxed{\exists V_x \in \mathcal{V}_x, \quad V_x \subset X - E\,.}$$

- Existe unha veciñanza V_x de x completamente contida en E, ou sexa,

$$\boxed{\exists V_x \in \mathcal{V}_x, \quad V_x \subset E\,.}$$

- Existe unha veciñanza V_x de x completamente contida no complementar de E, ou sexa,

$$\boxed{\exists V_x \in \mathcal{V}_x, \quad V_x \subset X - E\,.}$$

- Non ocorre ningunha das condicións anteriores, ou sexa,

$$\boxed{\forall V_x \in \mathcal{V}_x, \quad \begin{cases} V_x \cap (X - E) \neq \emptyset \\ V_x \cap E \neq \emptyset \end{cases}}$$

Se $\exists V_x \in \mathcal{V}_x, \quad V_x \subset E$, diremos que x é un *punto interior* de E. O conxunto de todos eles, $\mathrm{Int}(E)$, denomínase *interior* de E. Tamén se denota $\overset{\circ}{E}$.

Se $\exists V_x \in \mathcal{V}_x, \quad V_x \subset X - E$, diremos que x é un *punto exterior* de E. O conxunto de todos eles, $\mathrm{Ext}(E)$, denomínase *exterior de* E. Obviamente $\mathrm{Ext}(E) = \mathrm{Int}(X - E)$.

Se $\exists V_x \in \mathcal{V}_x, \quad V_x \subset E$, diremos que x é un *punto interior* de E. O conxunto de todos eles, $\mathrm{Int}(E)$, denomínase *interior* de E. Tamén se denota $\overset{\circ}{E}$.

Se $\exists V_x \in \mathcal{V}_x, \quad V_x \subset X - E$, diremos que x é un *punto exterior* de E. O conxunto de todos eles, $\mathrm{Ext}(E)$, denomínase *exterior de* E. Obviamente $\mathrm{Ext}(E) = \mathrm{Int}(X - E)$.

Se

$$\forall V_x \in \mathcal{V}_x,\; V_x \cap (X - E) \neq \emptyset \text{ e } V_x \cap E \neq \emptyset\,,$$

diremos que x é un *punto fronteiro* de E. O conxunto de todos eles, $\mathrm{Fr}(E)$, denomínase *fronteira* de E. Tamén se denota $\partial(E)$.

Os tres conxuntos son disxuntos e

$$X = \mathrm{Int}(E) \cup \mathrm{Fr}(E) \cup \mathrm{Ext}(E)\,.$$

Se

$$\forall V_x \in \mathcal{V}_x,\ V_x \cap (X - E) \neq \emptyset \text{ e } V_x \cap E \neq \emptyset\,,$$

diremos que x é un *punto fronteiro* de E. O conxunto de todos eles, $\mathrm{Fr}(E)$, denomínase *fronteira* de E. Tamén se denota $\partial(E)$.

Os tres conxuntos son disxuntos e

$$X = \mathrm{Int}(E) \cup \mathrm{Fr}(E) \cup \mathrm{Ext}(E)\,.$$

Propiedades do interior dun conxunto

- Se U é un conxunto aberto e $U \subset E$, entón $U \subset \mathrm{Int}(E)$.
- O conxunto $\mathrm{Int}(E)$ é aberto.
- $\mathrm{Int}(E)$ é a unión de todos os conxuntos abertos contidos en E.
- O interior de E é o *maior conxunto aberto* contido en E.

Propiedades do interior dun conxunto

- Se U é un conxunto aberto e $U \subset E$, entón $U \subset \mathrm{Int}(E)$.
- O conxunto $\mathrm{Int}(E)$ é aberto.
- $\mathrm{Int}(E)$ é a unión de todos os conxuntos abertos contidos en E.
- O interior de E é o *maior conxunto aberto* contido en E.

Propiedades do interior dun conxunto

- Se U é un conxunto aberto e $U \subset E$, entón $U \subset \mathrm{Int}(E)$.
- O conxunto $\mathrm{Int}(E)$ é aberto.
- $\mathrm{Int}(E)$ é a unión de todos os conxuntos abertos contidos en E.
- O interior de E é o *maior conxunto aberto* contido en E.

Propiedades do interior dun conxunto

- Se U é un conxunto aberto e $U \subset E$, entón $U \subset \mathrm{Int}(E)$.
- O conxunto $\mathrm{Int}(E)$ é aberto.
- $\mathrm{Int}(E)$ é a unión de todos os conxuntos abertos contidos en E.
- O interior de E é o *maior conxunto aberto* contido en E.

Adherencia

Xa que $\mathrm{Ext}(E)$ é aberto, o seu complementar, $\mathrm{Int}(E) \cup \mathrm{Fr}(E)$, é un conxunto pechado, e contén a E. Denomínase *adherencia* de E e se denota $\mathrm{Cl}(E)$. Tamén se denota $\overline{E}$. Os puntos de $\mathrm{Cl}(E)$ denomínanse *puntos adherentes*.

$$\boxed{\mathrm{Cl}(E) \ = \ \mathrm{Int}(E) \cup \mathrm{Fr}(E)}$$

Proposición

A adherencia, $\mathrm{Cl}(E)$, é o menor conxunto pechado contendo E. É a intersección de todos os conxuntos pechados que conteñen E.

Proposición

$$\mathrm{Fr}(E) = \mathrm{Fr}(X - E) = \mathrm{Cl}(E) \cap \mathrm{Cl}(X - E)\,.$$

Proposición

A adherencia, $\mathrm{Cl}(E)$, é o menor conxunto pechado contendo E. É a intersección de todos os conxuntos pechados que conteñen E.

Proposición

$$\mathrm{Fr}(E) = \mathrm{Fr}(X - E) = \mathrm{Cl}(E) \cap \mathrm{Cl}(X - E)\,.$$

Puntos de acumulación

Definición

Dicimos que x é un *punto de acumulación* de E se toda veciñanza de x contén un punto de E distinto de x. Ou sexa, se se verifica:

$$\boxed{V \in \mathcal{V}_x \quad \Rightarrow \quad (V - \{x\}) \cap E \neq \emptyset}$$

O conxunto E' de todos os puntos de acumulación de E chámase *conxunto derivado*.

Puntos de acumulación

Definición

Dicimos que x é un *punto de acumulación* de E se toda veciñanza de x contén un punto de E distinto de x. Ou sexa, se se verifica:

$$\boxed{V \in \mathcal{V}_x \quad \Rightarrow \quad (V - \{x\}) \cap E \neq \emptyset}$$

O conxunto E' de todos os puntos de acumulación de E chámase *conxunto derivado*.

Sexa X un espazo topolóxico e E un subconxunto de X.
Cúmprese:

$$\boxed{\mathrm{Cl}(E) = E \cup E'\,.}$$

Un conxunto nun espazo topolóxico é pechado sse contén todos os seus puntos de acumulación.

Sexa X un espazo topolóxico e E un subconxunto de X. Cúmprese:

$$\boxed{\mathrm{Cl}(E) = E \cup E'\,.}$$

Un conxunto nun espazo topolóxico é pechado sse contén todos os seus puntos de acumulación.

Puntos illados

Dicimos que $x \in E$ é un *punto illado* de E se existe unha veciñanza de x que non contén ningún outro punto de E.

Índice

Sexa $\mathbf{P}(X)$ o conxunto de partes de X. Unha topoloxía en X é un subconxunto τ de $\mathbf{P}(X)$ con certas propiedades. Se consideramos a relación de inclusión en $\mathbf{P}(X)$ podemos *comparar* topoloxías en X.

Definición

Dadas dúas topoloxías τ_1 e τ_2 nun conxunto X, diremos que τ_1 é *máis fina* que τ_2, e escribiremos $\tau_2 \leq \tau_1$, se $\tau_2 \subset \tau_1$ como subconxuntos de $\mathbf{P}(X)$. Tamén diremos, nesta situación, que τ_2 é *menos fina* que τ_1.

Ás veces é útil debuxar diagramas como o seguinte, onde se comparan diversas topoloxías en $\mathbb{R}$:

$$
\begin{tikzcd}
& \text{Discreta} \arrow[d, dash] & \\
& \text{Sorgenfrey} \arrow[d, dash] & \\
& \text{usual} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash] & \\
\text{Cofinita} \arrow[dr, dash] & & \text{Kolmogoroff} \arrow[dl, dash] \\
& \text{Trivial} &
\end{tikzcd}
$$

Para saber se unha topoloxía é máis fina que outra chega con comparar bases de veciñanzas. É o que se chama *criterio de comparación de Hausdorff*.

Proposición

Dadas dúas topoloxías τ_1 e τ_2 nun conxunto X, τ_1 é máis fina que τ_2 sse, *para cada punto* $x \in X$, cada elemento dunha base local de x en (X, τ_2) contén un elemento dunha base local de x en (X, τ_1).