# Tema 3. Espazos métricos

Topoloxía Xeral, 2017-18

# Índice

## Definición

Unha *métrica* nun conxunto $M$ é unha aplicación $d$ con valores reais

$$\boxed{d\colon M \times M \longrightarrow \mathbb{R}}$$

que a un punto $(x, y)$ de $M \times M$ asocia o número $d(x, y)$, de xeito que se verifiquen as tres condicións seguintes:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ sse $x = y$ .
2. $d(x, y) = d(y, x)$ , $\quad x, y \in M$ .
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , $\quad x, y, z \in M$ .

O par $(M, d)$ formado por un conxunto $M$ e unha métrica nel, $d$, denomínase *espazo métrico*.

## Definición

Unha *métrica* nun conxunto $M$ é unha aplicación $d$ con valores reais

$$\boxed{d\colon M \times M \longrightarrow \mathbb{R}}$$

que a un punto $(x, y)$ de $M \times M$ asocia o número $d(x, y)$, de xeito que se verifiquen as tres condicións seguintes:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ sse $x = y$ .
2. $d(x, y) = d(y, x)\,, \quad x, y \in M$ .
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)\,, \quad x, y, z \in M$ .

O par $(M, d)$ formado por un conxunto $M$ e unha métrica nel, $d$, denomínase *espazo métrico*.

Nun conxunto non baleiro $M$ calquera defínese a chamada *métrica discreta*,

$$d_S \colon M \times M \longrightarrow \mathbb{R},$$

dada por:

$$d_S(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = y, \\ 1 & \text{se} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Métricas destacads en $\mathbb{R}^n$:
a métrica $d_1$,

$$\boxed{d_1(x,y) \;=\; \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\,,}$$

a métrica $d_2$,

$$\boxed{d_2(x,y) \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,,}$$

e a métrica $d_\infty$,

$$\boxed{d_\infty(x,y) \;=\; \text{máx}_{1\leq i\leq n}\{|x_i - y_i|\}\,,}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Analogamente, para cada enteiro natural $k \in \mathbb{N}$ defínese:

$$\boxed{d_k(x,y) \;=\; \left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^k\right\}^{1/k} \;,}$$

Desigualdade de Minkowski:

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k\right\}^{1/k} \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{1/k} + \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right\}^{1/k},$$

onde $a_i$ e $b_i$ son números non negativos.

Analogamente, para cada enteiro natural $k \in \mathbb{N}$ defínese:

$$\boxed{d_k(x,y) \;=\; \left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^k\right\}^{1/k} \;,}$$

Desigualdade de Minkowski:

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^k\right\}^{1/k} \;\leq\; \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{1/k} + \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right\}^{1/k} ,$$

onde $a_i$ e $b_i$ son números non negativos.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, cúmprese

$$\boxed{d_\infty(x,y) \;\le\; d_k(x,y) \;\le n^{1/k} d_\infty(x,y)\,.}$$

Dedúcese que $d_\infty(x,y) = \lim_{k\to\infty} d_k(x,y)$

En fin, cúmprense tamén as desigualdades

$$\boxed{d_\infty(x,y) \;\le\; d_2(x,y) \;\le\; d_1(x,y) \;\le n \cdot d_\infty(x,y)\,.}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, cúmprese

$$\boxed{d_\infty(x,y) \ \le \ d_k(x,y) \ \le n^{1/k} d_\infty(x,y)\,.}$$

Dedúcese que $d_\infty(x,y) = \lim_{k\to\infty} d_k(x,y)$

En fin, cúmprense tamén as desigualdades

$$\boxed{d_\infty(x,y) \ \le \ d_2(x,y) \ \le \ d_1(x,y) \ \le n \cdot d_\infty(x,y)\,.}$$

$\mathcal{C}(I)$: espazo vectorial das funcións reais continuas do intervalo unidade $I = [0,1]$; nel imos definir dúas métricas.

A primeira, $\rho_\infty : \mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$, vén dada por:

$$\boxed{\rho_\infty(f,g) = \sup_{x \in I}\{|f(x) - g(x)|\}}$$

É a chamada *métrica da converxéncia uniforme* ou "métrica do supremo".

Defínese tamén sobre espazos máis xerais. Por exemplo, no espazo vectorial $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$, de funcións reais limitadas con dominio un conxunto arbitraio $X$.

$\mathcal{C}(I)$: espazo vectorial das funcións reais continuas do intervalo unidade $I = [0, 1]$; nel imos definir dúas métricas.

A primeira, $\rho_\infty : \mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$, vén dada por:

$$\boxed{\rho_\infty(f, g) \ = \ \sup_{x \in I}\{|f(x) - g(x)|\}}$$

É a chamada *métrica da converxéncia uniforme* ou "métrica do supremo".

Defínese tamén sobre espazos máis xerais. Por exemplo, no espazo vectorial $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, de funcións reais limitadas con dominio un conxunto arbitraio $X$.

$\mathcal{C}(I)$: espazo vectorial das funcións reais continuas do intervalo unidade $I = [0, 1]$; nel imos definir dúas métricas.

A primeira, $\rho_\infty : \mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$, vén dada por:

$$\boxed{\rho_\infty(f, g) \ = \ \sup_{x \in I}\{|f(x) - g(x)|\}}$$

É a chamada *métrica da converxéncia uniforme* ou "métrica do supremo".

Defínese tamén sobre espazos máis xerais. Por exemplo, no espazo vectorial $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, de funcións reais limitadas con dominio un conxunto arbitraio $X$.

A segunda métrica é:

$$\boxed{\rho_1(f,g) \;=\; \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx}$$

Denomínase *métrica* $L^1$.

# Bólas en $(M, d)$

$$\boxed{B_M(x,r) \ = \ \{y \in M \mid d(x,y) < r\}}$$

$$\boxed{B_M[x,r] \ = \ \{y \in M \mid d(x,y) \leq r\}}$$

# Distancia entre conxuntos

Dados dous conxuntos non baleiros $A$ e $B$ nun espazo métrico $(M, d)$, chámase *distancia entre os conxuntos* $A$ e $B$, e se denota $d(A, B)$, ao número

$$\boxed{d(A, B) \; = \; \inf\{d(x, y), \, x \in A, y \in B\}}$$

Cando un dos conxuntos se reduce a un punto fálase de *distancia do punto ao conxunto* e se escribe $d(x, A)$. Cúmprese

$$\boxed{|d(x, A) - d(y, A)| \; \leq \; d(x, y)}$$

# Distancia entre conxuntos

Dados dous conxuntos non baleiros $A$ e $B$ nun espazo métrico $(M, d)$, chámase *distancia entre os conxuntos* $A$ e $B$, e se denota $d(A, B)$, ao número

$$\boxed{d(A, B) \; = \; \text{ínf}\{d(x, y), \, x \in A, y \in B\}}$$

Cando un dos conxuntos se reduce a un punto fálase de *distancia do punto ao conxunto* e se escribe $d(x, A)$. Cúmprese

$$\boxed{|d(x, A) - d(y, A)| \; \leq \; d(x, y)}$$

# Conxunto limitado. Diámetro

Un conxunto $A$ nun espazo métrico $(M, d)$ dise *limitado* se está contido nalgunha bóla,

$$\boxed{\exists B_M(x, r) \text{ tal que } A \subset B_M(x, r)}$$

Chámase *diámetro* dun conxunto non baleiro $A$, e se denota $\delta(A)$, ao número

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\},$$

cando existe. Se tal supremo non existe, dise que o diámetro é infinito, e escríbese

$$\delta(A) = \infty .$$

# Conxunto limitado. Diámetro

Un conxunto $A$ nun espazo métrico $(M, d)$ dise *limitado* se está contido nalgunha bóla,

$$\boxed{\exists B_M(x,r) \text{ tal que } A \subset B_M(x,r)}$$

Chámase *diámetro* dun conxunto non baleiro $A$, e se denota $\delta(A)$, ao número

$$\delta(A) \; = \; \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\},$$

cando existe. Se tal supremo non existe, dise que o diámetro é infinito, e escríbese

$$\delta(A) = \infty\,.$$

# Métricas limitadas

Sexa $(M, d)$ un espazo métrico. A fórmula

$$\boxed{\overline{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}}$$

define unha nova métrica sobre $M$.

É unha *métrica limitada*, o espazo total é un conxunto limitado.

Outra métrica limitada é

$$\boxed{d_0(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}.}$$

# Métricas limitadas

Sexa $(M, d)$ un espazo métrico. A fórmula

$$\boxed{\overline{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}}$$

define unha nova métrica sobre $M$.

É unha *métrica limitada*, o espazo total é un conxunto limitado.

Outra métrica limitada é

$$\boxed{d_0(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}.}$$

# Métricas limitadas

Sexa $(M, d)$ un espazo métrico. A fórmula

$$\boxed{\overline{d}(x,y) \;=\; \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}}$$

define unha nova métrica sobre $M$.

É unha *métrica limitada*, o espazo total é un conxunto limitado.

Outra métrica limitada é

$$\boxed{d_0(x,y) \;=\; \min\{d(x,y),1\}\,.}$$

# Unha métrica en $\mathbb{S}^2$

$$d_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad d_{\mathbb{S}^2}(x,y) = \arccos(\langle x, y\rangle)\,,$$

Pódese definir en calquera esfera $\mathbb{S}^n$. Outra fórmula equivalente é:

$$d_{\mathbb{S}^n}(x,y) = 2\,\mathrm{arcsen}(\frac{1}{2}d_2(x,y))\,.$$

# Unha métrica en $\mathbb{S}^2$

$$d_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad d_{\mathbb{S}^2}(x,y) = \arccos(\langle x, y\rangle)\,,$$

Pódese definir en calquera esfera $\mathbb{S}^n$. Outra fórmula equivalente é:

$$d_{\mathbb{S}^n}(x,y) = 2\,\mathrm{arcsen}(\frac{1}{2} d_2(x,y))\,.$$