Norma

Produto escalar ou interno

A estrutura euclidiana (que é unha estrutura métrica) defínese mediante o *produto escalar* de dous vectores, o que permite definir ángulo (e, pois, relacións de ortogonalidade) e, o que vai ser fundamental neste curso, distancia entre puntos.

O produto escalar, que xa se definíu no Bacharelato, é un obxecto matemático importante. Pódese definir en espazos vectoriais máis abstractos que $\mathbb{R}^p$, dando lugar a estruturas xeométricas en tales espazos, como se verá na materia de *Álxebra linear e multilinear* de segundo curso.

1.1 Produto escalar

Sexan $x, y \in \mathbb{R}^p$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$.

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \ .}$$

1.2 Propiedades do produto escalar

Sexan $x, y \in \mathbb{R}^p$, $a \in \mathbb{R}$. O produto escalar é unha función

$$\langle\ ,\ \rangle \colon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

coas seguintes propiedades:

$$\begin{array}{llll} I & \langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle & III & \langle x, x\rangle = 0 \quad \text{sse} \quad x = 0 \\ & \langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle & & \\ & \langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle = \langle x, ay\rangle & & \\ II & \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle & IV & \langle x, x\rangle \geq 0 \end{array}$$

Norma

1.3 Norma

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \ .}$$

1.4 Propiedades da norma

Sexan $x, y \in \mathbb{R}^p$, $a \in \mathbb{R}$. Verifícase:

1. $\| x \| \geq 0$, e $\| x \| = 0$ sse $x = 0$
2. $\| ax \| = |a|. \| x \|$
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (*desigualdade de Minkowski*)

1.5 Relacións entre norma e coordenadas

Sexa $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ un punto de $\mathbb{R}^p$. Demostrade as seguintes desigualdades:

$$\boxed{|x_i| \ \leq \| \ x \ \| \leq \ \sqrt{p}\, \text{máx}\,\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|\},\ i = 1, 2, \dots, p\,.}$$

1.6 Vectores ortogonais

Sexan $x, y \in \mathbb{R}^p$. Demostrade que a seguinte igualdade

$$\boxed{\|x + y\|^2 \ = \ \|x\|^2 + \|y\|^2}$$

se verifica sse $\langle x, y \rangle = 0$. Neste caso, dise que x e y son vectores *ortogonais* ou *perpendiculares*.

1.7 Desigualdades derivadas da desigualdade de Minkowski

Sexan $x, y \in \mathbb{R}^p$. Verifícanse as seguintes desigualdades:

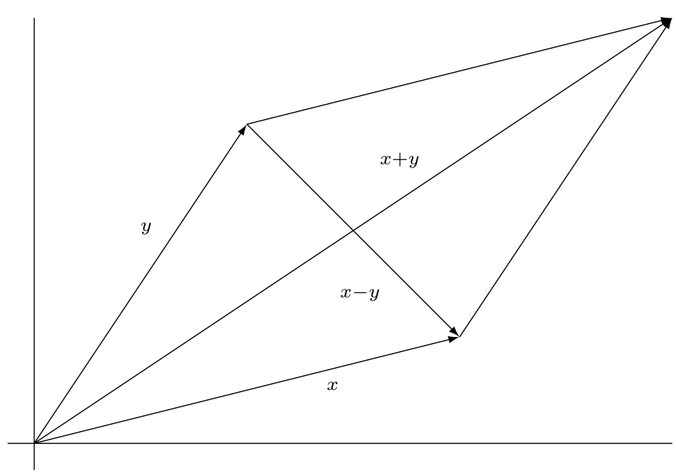
$$\boxed{|\, \| \ x \ \| - \| \ y \ \| \,| \leq \| \ x \pm y \ \| \leq \| \ x \ \| + \| \ y \ \|}$$

1.8 Identidade do paralelogramo

A seguinte propiedade denomínase *identidade do paralelogramo*. Afirma que a suma dos cadrados das lonxitudes das diagonais dun paralelogramo é igual á suma dos cadrados das lonxitudes dos lados:

Sexan $x, y \in \mathbb{R}^p$. Verifícase:

$$\boxed{\| \ x + y \ \|^2 + \| \ x - y \ \|^2 = \ 2(\| \ x \ \|^2 + \| \ y \ \|^2)\,.}$$



Dedúcese inmediatamente da definición, $\| \ x \ \|^2 = \langle x, x \rangle$, e das propiedades de linearidade do produto escalar.

Distancia

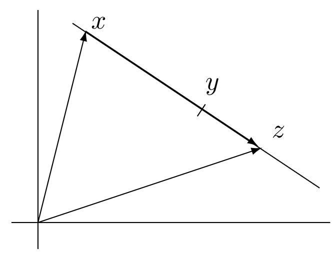
Propiedades da distancia

1.9 Distancia entre puntos colineares

Na desigualdade triangular a igualdade dase unicamente no caso de puntos colineares.

Sexan x, y, z tres puntos en $\mathbb{R}^p$, os tres nunha mesma recta. Supoñamos y comprendido entre x e z. Expresamos a recta, l, pola súa ecuación vectorial,

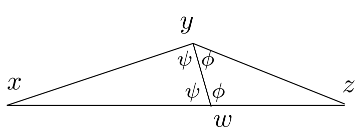
$$l \equiv x + t(z - x) .$$



Así, para $t = 0$ temos o punto x, para $t = 1$ o punto z e para t comprendido entre 0 e 1, os puntos do segmento determinado por x e z. Agora, se $y = x + t(z - x)$, con $t \in (0, 1)$, é:

$$\|y - x\| = |t| \cdot \|z - x\| = t \cdot \|z - x\| ,$$
$$\|y - z\| = |1 - t| \cdot \|z - x\| = (1 - t) \cdot \|z - x\| ,$$

e resulta $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$.



Se os puntos non son colineares, determinan un triángulo. Se a lonxitude dun lado fora igual á suma das lonxitudes dos outros dous, digamos, $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$, tomando w como na figura, con $d(x, w) = d(x, y)$, teriamos dous triángulos isósceles, e $\phi + \psi = 180^{\underline{0}}$.

Distancia entre conxuntos e diámetro

1.10 Distancia dun punto a un conxunto

Dado un conxunto A e puntos x, y en $\mathbb{R}^p$, cúmprese

$$\boxed{|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) .}$$

En efecto, sexa $z \in A$. Temos

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) .$$

Como $\inf\{d(x, a), a \in A\}$ é menor ou igual que $d(x, z)$, obtemos

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, z) ,$$

para todo $z \in A$. Escribindo esta expresión na forma $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, z)$ e tomando de novo o ínfimo cando z percorre A, xa que $d(x, A) - d(x, y)$ é unha cota inferior, obtemos $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$, ou sexa

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y) .$$

Intercambiando os papeis de x e de y, tendo en conta a simetría da distancia, temos $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ e, pois, obtemos a desigualdade buscada.

1.11 Diámetro dunha unión de conxuntos

Sexan A e B subconxuntos limitados de $\mathbb{R}^p$. Cúmprese a desigualdade

$$\boxed{\delta(A \cup B) \leq d(A,B) + \delta(A) + \delta(B)\,.}$$

Conxuntos e funcións no espazo euclidiano

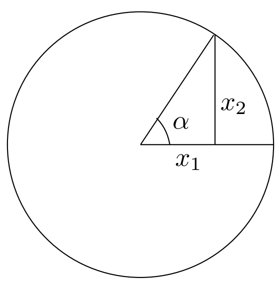
1.12 Circunferencia e esferas

Imos denominar *circunferencia unitaria* á circunferencia en $\mathbb{R}^2$ de centro a orixe e raio 1. Denotarémola por $\mathbb{S}^1$:

$$\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}\,.$$

Analogamente, en dimensións superiores a 2, falaremos de *esferas unitarias*:

$$\mathbb{S}^p = \{x \in \mathbb{R}^{p+1} \mid \|x\| = 1\}\,.$$



Un punto $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{S}^1$ está completamente determinado por un ángulo comprendido entre 0 e 2π radiáns. Escribiremos o ángulo como $\alpha = 2\pi t,\ t \in [0,1]$, e as súas coordenadas son $x_1 = \cos 2\pi t,\ x_2 = \operatorname{sen} 2\pi t$.

1.12.1

Interpreta xeometricamente a función

$$h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

dada por $h(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$. (Observade que $h(n+t) = h(t)$ cando $n \in \mathbb{Z}$).

1.12.2

Sexa S_r a circunferncia de centro a orixe e raio r. Construíde unha función bixectiva entre $\mathbb{S}^1$ e S_r.

1.12.3

Para cada enteiro natural n escollede un punto (x_n, y_n) do plano $\mathbb{R}^2$ de xeito que

1. $|x_n| \neq |y_n|$,
2. $\|(x_n, y_n)\| = 1/n$,
3. $x_n > x_{n+1}$ e
4. $x_n \neq 0\,,\ y_n \neq 0$.

Topoloxía

Conxuntos pechados

A unión arbitraria de conxuntos pechados non sempre é un conxunto pechado. Imos considerar dous exemplos.

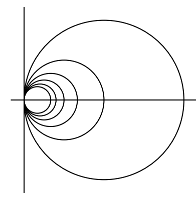
2.1 Pendente hawaiano

Tamén chamado *pendente infinito*. Trátase da unión dunha infinidade de circunferencias:

$$\mathcal{C}_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1/n)^2 + y^2 = 1/n^2\},$$

onde $n \in \mathbb{N}$, e

$$\mathcal{H} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$$



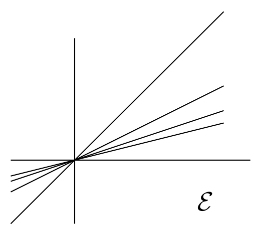
2.2 Rectas de declive $1/n$

Trátase, desta volta, da unión dunha infinidade enumerábel de rectas pola orixe:

$$\mathcal{L}_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x/n\},$$

onde $n \in \mathbb{N}$, e

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_n$$



Interior dun conxunto

Dado un subconxunto arbitrario A de $\mathbb{R}^p$, A sempre contén algún conxunto aberto, cando menos o conxunto baleiro, $\emptyset \subset A$. E A sempre está contido nalgún conxunto aberto, pois $A \subset \mathbb{R}^p$. Calquera que sexa A, haberá un conxunto aberto $U \subset A$ que sexa o maior conxunto aberto contido en A? Ou sexa, un conxunto aberto U contido en A tal que

$$\left.\begin{array}{r} V \text{ aberto} \\ V \subset A \end{array}\right\} \Rightarrow V \subset U\,.$$

Reciprocamente, calquera que sexa A haberá un conxunto aberto W, con $A \subset W$, que sexa o menor de todos? Procura encontrar as túas respostas , examinando algúns exemplos.

2.3 Punto interior

Dados un punto $x \in \mathbb{R}^p$ e un conxunto $E \subset \mathbb{R}^p$, pode ocorrer $x \in E$ ou $x \notin E$. Para o estudo topolóxico tamén será importante saber cal das tres posibilidades seguintes, excluíntes entre si, ten lugar:

$a)$ Existe unha bóla de centro x completamente contida en E,

$$\boxed{\exists r > 0, B_p(x,r) \subset E\ .}$$

$b)$ Existe unha bóla de centro x completamente contida no complementar de E,

$$\boxed{\exists r > 0, B_p(x,r) \subset \mathbb{R}^p - E\ .}$$

$c)$ Non ocorre nen $a)$ nen $b)$, ou sexa,

$$\boxed{\forall r > 0\,, \begin{cases} B_p(x,r) \cap E \neq \emptyset\,, \\ B_p(x,r) \cap (\mathbb{R}^p - E) \neq \emptyset \end{cases}}$$

Os puntos que verifican a condición $a)$ pertencen, obviamente, ao conxunto. Denomínanse *puntos interiores* de E.

2.3.1 Exercicio

Pon exemplos de conxuntos en $\mathbb{R}^2$ que teñan puntos interiores e puntos que non o son.

2.4 Interior dun conxunto

Dado un conxunto E, o conxunto de todos os puntos interiores de E denomínase *interior* de E, e denótase $\mathrm{Int}(E)$ ou $\overset{\circ}{E}$.

2.5 Propiedades do interior

1. Se U é un conxunto aberto e $U \subset E$, entón $U \subset \mathrm{Int}(E)$.
2. $\mathrm{Int}(E)$ é un conxunto aberto.
3. $\mathrm{Int}(E)$ é a unión de todos os conxuntos abertos contidos en E.

Dedúcese destas propiedades que $\mathrm{Int}(E)$ é o maior conxunto aberto contido en E.

Os puntos que verifican a condición $c)$ denomínanse *puntos fronteira*, $\mathit{boundary\ points}$, e ao seu conxunto, *fronteira*, $\mathit{boundary}$, de E. Son conceptos importantes, nos que nós, este curso, non imos demorar. Para estudar un pouco máis deles está disponíbel unha *Guia de Estudo* no curso virtual.

En moitos casos compre traballar, non en todo o espazo euclidiano, senón nunha parte X de $\mathbb{R}^p$. Isto ocorre, por exemplo, ao traballar con funcións cuxos dominios de definición non son todo o espazo. Nestes casos hai que referir todos os conceptos estudados, bóla aberta, conxunto aberto,... ao novo marco de traballo, que será o novo *espazo*.

Moita da linguaxe utilizada, como interior e fronteira, se corresponde coa intuición xeométrica ao traballar exemplos sinxelos en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Traballar noutros espazos esixe unha nova intuición máis elaborada, máis *topolóxica* que xeométrica. Por exemplo, se tomamos $\mathbb{Z}$ como espazo, todos os subconxuntos son abertos e pechados a un tempo.

En fin, as veces teremos que traballar en dous espazos a un tempo, un contido no outro. Nestes casos referirémonos ao menor como *subespazo*.

Sucesións e Converxencia

Sucesións

O concepto de *sucesión* é o mesmo en $\mathbb{R}$ que en $\mathbb{R}^p$. Se $x_1, x_2, x_3, \ldots$ son números, constitúen unha sucesión en $\mathbb{R}$. Se son p-vectores, unha sucesión en $\mathbb{R}^p$. Nun e noutro caso, trátase dunha colección de puntos con índices en $\mathbb{N}$. Esta forma de se expresar é correcta e rigorosa, pero pode prestarse a interpretacións erróneas. Por exemplo, as sucesións númericas $\{1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, 1/3, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4, \ldots\}$ e $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$ son distintas, e son diferentes da sucesión $\{1/2, 1, 1/4, 1/3, 1/6, 1/5 \ldots\}$, a pesar de que o conxunto de puntos nos tres casos é o mesmo.

Nunha sucesión importan os puntos, pero importan tamén *os nomes* que lles damos, ou sexa, o índice correspondente. Por iso, a forma máis eficaz de definir sucesión utiliza o concepto de función:

3.1 Sucesión

Unha *sucesión*, *sequence*, nun espazo X é unha aplicación de dominio $\mathbb{N}$ e de rango X,

$$\boxed{s\colon \mathbb{N} \longrightarrow X\,.}$$

Normalmente designaremos por x_n a imaxe de n, $x_n = s(n)$, e denotaremos a sucesión por $\{x_n\}$. Ao escribirmos $\{x_n\}$ sobrentendemos que o índice n percorre o conxunto $\mathbb{N}$. A imaxe de cada n pola función s denominarémola *termo*. Así, x_n será o n-ésimo termo da sucesión. Cando queramos referirnos ao conxunto de puntos da sucesión escribiremos $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

O seguinte concepto resultará moi cómodo para expresar a converxencia dunha sucesión:

3.2 Cola dunha sucesión

Denomínase *cola* (*tail*) dunha sucesión ao conxunto de termos da mesma a partir dun dado, ou sexa, dado un enteiro n_0, aos termos x_n con $n \geq n_0$.

Converxencia

Xa se ten estudado a converxencia de sucesións numéricas. O concepto de *converxencia de sucesións* é moi intuitivo: unha sucesión $\{x_n\}$ converxe a un punto x_0 cando os termos da sucesión vanse achegando ao punto tanto como se queira. En $\mathbb{R}$ adoita formalizarse do xeito seguinte:

A sucesión $\{x_n\}$ converxe a x_0 se para todo $\epsilon > 0$ existe un n_0 tal que se $n \geq n_0$, entón $|x_n - x_0| < \epsilon$.

3.3 Converxencia en $\mathbb{R}^p$

Pódese expresar formalmente de varias maneiras equivalentes. Por exemplo:

1. Substituír na expresión usada en $\mathbb{R}$ *valor absoluto* por *norma*.
2. A sucesión numérica $\{d(x_n, x_0)\}$ converxe a cero.
3. Toda bóla aberta de centro x_0 contén unha cola da sucesión.
4. Todo conxunto aberto ao que pertence x_0 contén unha cola da sucesión.

Argumentar cuidadosamente a equivalencia destas catro afirmacións é un bó exercicio.

No caso de se cumprir estas condicións diremos que $\{x_n\}$ é unha *sucesión converxente*, e escribiremos

$$\boxed{\{x_n\} \longrightarrow x_0, \quad \text{ou} \quad \operatorname{lím}_{n\to\infty} x_n = x_0\,.}$$

Diremos, tamén, que x_0 é o *límite* da sucesión.

3.4 Construcción de sucesións converxentes

Con moita frecuencia teremos que construír sucesións que converxan a un punto x_0. As veces propoñerannos datos moi concretos sobre a sucesión a construír; outras veces, especialmente en cuestións teóricas, teremos que traballar nun marco moi abstracto. Sempre se pode utilizar o seguinte procedimento, imprescindíbel nos casos máis abstractos.

> *Sexa x_0 un punto dun espazo X. Para cada n tomemos un punto $x_n \in B_X(x_0, 1/n)$. A sucesión $\{x_n\}$ resultante converxe a x_0.*

En efecto, como $d(x_n, x_0) < 1/n$, se verifica a condición $2)$ de arriba. Un exemplo de aplicación: dado un conxunto E e un punto de acumulación del, x_0, este método permite construír unha sucesión de puntos de E, todos diferentes de x_0, converxendo a x_0.

Topoloxía e Converxencia

Nós non imos utilizar a cuarta das anteriores formulacións equivalentes de converxencia. Pero ten o interese de que prescinde de calquera referencia métrica, non usa nen distancias nen bólas, é un criterio puramente topolóxico. De feito, no ámbito dos espazos euclidianos a converxencia permite resolver calquera cuestión topolóxica. Por exemplo, permite caracterizar aos conxuntos abertos.

3.5 Caracterización dos conxuntos abertos usando converxencia de sucesións

> *Un subconxunto U dun espazo X é aberto sse cada sucesión $\{x_n\}$ converxendo a un punto x_0 de U ten unha cola en U.*

Para ver que, se se cumpre a condición, o conxunto é aberto, imos argumentar por reducción ao absurdo. Sexa x_0 un punto de U. Se ningunha bóla de centro x_0 está completamente contida en U, construímos unha sucesión escollendo un x_n en $B_X(x_0, 1/n)$ que non pertenza a U.

Tamén permite caracterizar os conxuntos pechados:

3.6 Caracterización dos conxuntos pechados usando converxencia de sucesións

> *Un subconxunto E dun espazo X é pechado sse o límite de cada sucesión converxente de puntos de E está en E.*

É o Teorema 3.14 da referencia principal (páx. 45), resultado que usaremos decote, especialmente en cuestións teóricas. Vexamos agora, como exemplo práctico, que a esfera uniaria $\mathbb{S}^2$ é un subconxunto pechado de $\mathbb{R}^3$. Se denotamos por (x, y, z) as coordenadas dun punto do espazo euclidiano tridimensional, a esfera é o conxunto de puntos que verifican a ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sexa $\{(x_n, y_n, z_n)\}$ unha sucesión de puntos de $\mathbb{S}^2$ converxendo a (x_0, y_0, z_0). Trátase de comprobar que o punto (x_0, y_0, z_0) pertence tamén a $\mathbb{S}^2$. Ou sexa, que se se verifica a ecuación $x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, daquela tamén se verifica $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$. E isto é un pequeno exercicio de converxencia de sucesións.

3.7 Unión enumerábel de conxuntos pechados

Utilizade este Teorema para estudar o carácter pechado de unións enumerábeis de conxuntos pechados. Por exemplo, o pendente Hawaiano, ou a unión de rectas de declive $1/n$, ou os conxuntos dos exercicios 2.1 (conxunto C) e 3.5.

Para nós, o nexo entre converxencia e topoloxía vai vir dado polo concepto de **punto de acumulación**, (*accumulation point*), o que utilizaremos sistematicamente. No curso virtual existe unha *Guía de estudo* sobre este concepto.

Conxunto derivado

Denomínase *conxunto derivado*, (*derived set*), dun conxunto E ao conxunto de todos os puntos de acumulación de E. Denótase E'. Este concepto foi introducido por G. Cantor en 1872.

3.8 Propiedades do conxunto derivado

1. Se $A \subset B$, entón $A' \subset B'$.
2. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
3. $(A')' \subset A'$.

Destas propiedades e do Teorema 3.12 da referencia principal (páx. 44), dedúcese que, para calquera conxunto E, os conxuntos E' e $E \cup E'$ son pechados.

3.9 Conxunto derivado de $E - F$

1. Sexa E un conxunto nun espazo X, F un subconxunto finito de E. Demostrade que o conxunto derivado de E e o conxunto derivado de $E - F$ coinciden.
2. Demostrade o mesmo resultado se F é un conxunto sen puntos de acumulación, ou sexa, $F' = \emptyset$.
3. Ocorre o mesmo se F é un subconxunto enumerábel?

Adherencia

No que segue vaise traballar nun subconxunto E dun espazo X.

1. Se $x \in E$, certamente $d(x, E) = 0$. Se $d(x, E) = 0$, necesariamente $x \in E$?
2. A unión $E \cup E'$ é o *menor* conxunto pechado que contén a E. Denomínase *adherencia* de E e denótase $\overline{E}$ ou $\mathrm{Cl}(E)$. En español denomínase *adherencia* ou *clausura*. En inglés, *closure*. Os seus puntos denomínanse *puntos adherentes* de E, *adherent points*, *closure points* ou *points of closure*..
3. Son todos os puntos adherentes puntos de acumulación? En caso de resposta negativa, caracteriza, usando bólas, os puntos de $E - E'$.
4. Comproba a igualdade
$$\mathrm{Cl}(E) = \{x \in X \mid d(x, E) = 0\}.$$

No curso virtual existe unha *Guía de estudo* sobre interior, adherencia e fronteira.

3.10 Un exemplo difícil

Sexa $E = \{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, onde cada x_n é un punto de $\mathbb{R}^2$ que verifica a seguinte condición:

$$\frac{n-1}{n} < \|x_n\| < \frac{n}{n+1}\,.$$

Sexa E' o conxunto derivado de E.

1. ¿Pode ser $E' = \emptyset$?
2. ¿Pode ter E' un único punto?
3. ¿Pode ter E' máis dun punto?
4. Sexa $\mathbb{S}^1$ a circunferencia unitaria. Demostrade que $E' \subset \mathbb{S}^1$.
5. ¿Pode ser $E' = \mathbb{S}^1$? (Dar unha resposta formalmente completa é difícil).

Compleción

O seguinte é un resultado equivalente ao *Teorema dos Bloques Encaixados*, válido tamén en espazos máis abstractos:

4.1 Teorema de Cantor.

Sexa $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ unha familia contractiva de conxuntos pechados non baleiros e limitados de $\mathbb{R}^p$. Se se verifica $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, entón $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

4.1.1 Exercicio

Dade exemplos de

1. Unha sucesión contractiva $\{K_n, n \in \mathbb{N}\}$ de conxuntos pechados e non baleiros no espazo $X = (0,1)$, con $\lim_{n\to\infty} \delta(K_n) = 0$, e tal que a súa intersección sexa baleira.
2. Unha sucesión contractiva en $\mathbb{R}$ de conxuntos non baleiros U_n, con diámetros tendendo a cero, $\lim_{n\to\infty} \delta(U_n) = 0$, e con intersección baleira, $\cap_{n=1}^{\infty} U_n = \emptyset$.
3. Unha sucesión contractiva en $\mathbb{R}$ de conxuntos pechados e non baleiros E_n con intersección baleira, $\cap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$.

Moitas das propiedades topolóxicas dos espazos euclidianos dependen da propriedade de $\mathbb{R}^p$ de ser completo. O seguinte teorema vai xogar un papel central. Non só equivale á propiedade de completitude de $\mathbb{R}^p$, senon que fornece o paso do Teorema dos Bloques Encaixados á converxencia das sucesións de Cauchy.

4.2 Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Todo subconxunto infinito e limitado de $\mathbb{R}^p$ ten un punto de acumulación.

Establecida a completitude de $\mathbb{R}^p$, a converxencia de sucesións permite demostrar importantes propiedades topolóxicas do espazo euclidiano. Vexamos tres. A primeira e a terceira adiantan os conceptos de *conexidade* e *compacidade*. A segunda é un caso particular do Teorema de Baire, que non imos estudar. Ningunha destas propiedades é certa de substituir $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Q}$.

4.3 Conexidade de $\mathbb{R}$

Non existe ningún subconxunto propio (diferente do baleiro e do total) de $\mathbb{R}$ ao mesmo tempo aberto e pechado.

Idea da demostración: Sexa U un conxunto tal. Daquela, o seu complementar, V, tamén é non baleiro, aberto e pechado. Sexa $x_1 \in U$, $y_1 \in V$. Supoñamos $x_1 < y_1$. Sexa $z_1 = \dfrac{x_1 + y_1}{2}$ o punto medio. Se $z_1 \in U$, chamémoslle x_2 e chamemos y_2 a y_1. Se $z_1 \in V$, chamémoslle y_2 e chamemos x_2 a x_1. O intervalo $[x_2, y_2]$ ten o extremo da esquerda en U e o da dereita en V. Tomemos agora $z_2 = \dfrac{x_2 + y_2}{2}$ e continuemos este proceso indefinidamente. Así, formamos dúas sucesións, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, unha enteiramente en U, outra enteiramente en V. As dúas son converxentes, por ser monótonas e limitadas. A sucesión $\{d(x_n, y_n)\}$ converxe a cero. Logo as dúas sucesións converxen ao mesmo punto.

O enunciado anterior é unha forma de expresar a propiedade de $\mathbb{R}$ de ser *conexo*, algo que se estudará no Tema 8. O argumento anterior xeneralízase sen moita dificultade a $\mathbb{R}^p$, sen máis que substituír intervalos por segmentos.

4.4 Teorema de Baire

Non se pode expresar $\mathbb{R}^2$ como unión enumerábel de rectas.

Imos demostrar este caso particular do Teorema de Baire. Sexa $\{L_n, n \in \mathbb{N}\}$ unha familia enumerábel de rectas en $\mathbb{R}^2$. Imos demostrar que existe un punto do plano que non pertence á unión da familia.

Sexa x_1 un punto do plano tal que $B_2[x_1, 1] \cap L_1 = \emptyset$. Tomemos un $x_2 \in B_2(x_1, 1)$ tal que $B_2[x_2, r_2] \cap L_2 = \emptyset$ para algún $r_2 \leq 1/2$ e tal que $B_2[x_2, r_2] \subset B_2[x_1, 1]$. Continuando este proceso, sexa $x_n \in B_2(x_{n-1}, r_{n-1})$ tal que $B_2[x_n, r_n] \cap L_n = \emptyset$ para algún $r_n \leq r_{n-1}/2$ e tal que $B_2[x_n, r_n] \subset B_2[x_{n-1}, \frac{r_{n-1}}{2}]$. A sucesión $\{x_n\}$ así construída é de Cauchy, pois a cola $\{x_n, n \geq k\}$ está contida na bóla $B_2[x_k, r_k]$ e os diámetros destes conxuntos converxen a cero. O seu límite, digamos, x_0, pertence á intersección de todas as bolas pechadas $B_2[x_n, r_n]$, logo non pertence a ningunha recta L_n.

O Teorema de Baire di:

Non se pode expresar $\mathbb{R}^p$ como unión enumerábel de conxuntos pechados con interior baleiro.

Coberturas abertas

Sexa X un espazo e $\mathcal{U} = \{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ unha familia de conxuntos abertos en X. Dise que $\mathcal{U}$ é unha *cobertura aberta* de X se cada punto de X pertence a algún dos conxuntos U_λ da familia; ou sexa, se cada $U_\lambda \subset X$ é aberto e

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda .$$

Tamén se fala de cobertura dun conxunto E do espazo X. A diferencia é que agora os conxuntos U_λ non son necesariamente subconxuntos de E; polo tanto, a condición de cobertura para un conxunto é

$$E \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda .$$

A cobertura pode ser *finita*, cando Λ é un conxunto finito. *Enumerábel*, cando Λ é o conxunto $\mathbb{N}$ ou outro equipotente a el. Ou infinita non enumerábel, noutro caso.

4.5 Exemplos de coberturas abertas

1. Na demostración de que todo conxunto aberto $U \subset X$ é unión de bólas abertas, constrúese unha cobertura aberta de U da seguinte maneira: para cada $x \in U$ tómase unha bóla $B_X(x, r_x)$ completamente contida en U; a familia $\{B_X(x, r_x), x \in U\}$ é unha cobertura de U. Neste caso cúmprese a igualdade,

$$U = \bigcup_{x\in U} B_X(x, r_x) .$$

2. A familia $\{B_p(0, n), n \in \mathbb{N}\}$ é unha cobertura aberta de $\mathbb{R}^p$. Neste exemplo, non podemos quedarnos cunha subcolección finita que aínda sexa unha cobertura de $\mathbb{R}^p$.

3. Sexa $E \subset X$ un conxunto e p un punto de acumulación que non pertenza a E. Sexa $U_n = X - B_X[p, 1/n]$. A colección $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ é unha cobertura aberta de E. Tampouco neste exemplo podemos quedarnos cunha subcolección finita que aínda sexa unha cobertura de E.

As coberturas abertas xogarán un papel moi importante no estudo da compacidade. No marco dos espazos euclidianos poderiamos limitarnos a considerar coberturas enumerábeis e finitas.

4.6 Compacidade do intervalo unidade

Sexa $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ *unha cobertura aberta enumerábel do intervalo unidade* $I = [0, 1]$. *Existe sempre un* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $I \subset U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_k$.

Idea da demostración: Argumentamos por reducción ao absurdo. Supoñamos que o resultado non fora certo. Construímos unha sucesión escollendo puntos x_n de I coa condición

$$x_n \notin U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n .$$

A sucesión $\{x_n\}$ resultante terá unha subsucesión que converxa a un punto x_0 de I. Este punto x_0 pertencerá a algún aberto da cobertura, digamos U_{n_0}. Isto leva a unha contradición.

Esta propiedade do intervalo foi demostrada por Émile Borel en 1895. Denomínase *compacidade enumerábel*, termo que nós non imos empregar. Neste caso, equivale á propiedade de compacidade, que estudaremos no Tema 9.

Observa que na anterior demostración só se utilizaron dúas propiedades do intervalo I (Cales?). Poderías xeneralizalo a calquera subconxunto K de $\mathbb{R}^p$ que satisfaga as mesmas dúas propiedades.

Continuidade secuencial

A continuidade secuencial adoita ser un criterio eficaz para determinar a discontinuidade dunha función nun punto: abonda encontrar *unha* sucesión converxendo ao punto en cuestión e tal que a sucesión imaxe non converxa á imaxe do punto. Por contra, en moitos casos non é o método máis simple para concluír que a función é continua nun punto; habería que considerar *calquera* sucesión converxendo ao punto e comprobar que verifica o criterio. Imos ver algún exemplo.

4.7 Exemplo 1

Consideremos a función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x, |x| + y) & \text{se} \quad y > 0 \\ (x,y) & \text{se} \quad y \leq 0 \end{cases}$$

Imos estudar a continuidade nos puntos $(1,0)$ e $(0,0)$. O primeiro é facerse unha idea xeométrica da transformación: deixa fixos os puntos do semiplano inferior e move verticalmente os do semiplano superior de xeito que a semirrecta vertical de abscisa x se desplaza verticalmente para empezar na diagonal do cadrante correspondente.

Así, se collemos a sucesión $\{(1, 1/n)\}$, que converxe a $(1,0)$, vemos que a sucesión imaxe converxe a $(1,1)$, concluíndo que a función non é continua no punto $(1,0)$. Naturalmente, pode haber outras sucesións que converxan a $(1,0)$ e tais que a sucesión imaxe verifique o criterio. Por exemplo, isto sempre ocorre coa sucesión constante; ou, neste caso, coa sucesión $\{(1, -1/n)\}$.

Sexa agora $\{(x_n, y_n)\}$ unha sucesión arbitraria que converxa ao punto $(0,0)$. Ou sexa, tal que $\{x_n\} \to 0$ e $\{y_n\} \to 0$. Denotemos por (x_n, z_n) a imaxe do punto (x_n, y_n) pola función f. Para cada n, non sabemos se y_n é menor ou maior que 0, polo que non sabemos o valor de z_n. Pero sempre $y_n \leq z_n \leq |x_n| + y_n$, polo que $\{z_n\}$ converxe a 0. A función, pois, é continua no punto $(0,0)$.

Exemplo 2

Sexa $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a función dada por

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,,$$
$$f(0,0) = 0\,.$$

Esta función é *separadamente continua* (terminoloxía non moi xeneralizada e que non usaremos), ou sexa, é continua en cada variábel; de forma máis precisa, as funcións f_a e f^b da recta en si mesma, dadas por $f_a(y) = f(a,y)$ e $f^b(x) = (x,b)$, son continuas. Non obstante, f non é continua no punto $(0,0)$. É doado encontrar unha sucesión que o pon de manifesto.

Exemplo 3

Por último, sexa $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a función dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x}(x,y) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ (0,0) & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Trátase, como execicio, de estudar a continuidade secuencial nos puntos $(0,0)$ e $(0,1)$. Para interpretar xeometricamente a función, unha suxerencia: calculade a imaxe dunha recta pola orixe e dunha recta horizontal.

Algunhas funcións curiosas

Función continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Trátase dunha función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e no punto 0, pero non nos restantes números racionais. Consideremos os puntos racionais escritos como fracción, $\frac{r}{s}$, onde $r > 0$ e a fracción é irreducíbel. Definimos a función da seguinte maneira:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{s} & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} - \{0\}\,,\, x = \dfrac{r}{s} \\ f(x) = 0 & \text{se} \quad x = 0 \text{ ou } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

A clave está en que se unha sucesión de números racionais converxe a un número irracional, os denominadores teñen que se facer cada vez maiores.

Funcións continuas nun só punto de $\mathbb{R}$

Van ser funcións $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A primeira só é continua no 0. Consiste en modificar o exemplo anterior da seguinte maneira:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{s} & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} - \{0\}\,,\, x = \dfrac{r}{s} \\ f(x) = x & \text{se} \quad x = 0 \text{ ou } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Para ver que a función non é continua nun número racional da forma $1/s$, podemos considerar a sucesión $\{\frac{1}{s} + \frac{1}{p^n}\}$, onde p é un número primo que non divide a s.

O segundo exemplo é máis amable. Trátase dunha función bixectiva definida así:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Para concluír sobre a continuidade no 0, dado ϵ abonda tomar $\delta = \epsilon$. Para outro punto x, tómase un ϵ menor que $|x|$.

Función característica

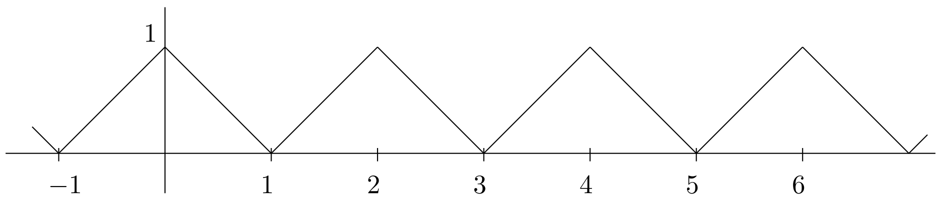
Sexa E un subconxunto dun espazo X. A *función característica* de E, χ_E, defínese como

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in E \\ 0 & \text{se} \quad x \notin E \end{cases}$$

É doado comprobar que a función característica de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ non é continua en ningún punto. Para analizar a continuidade no caso xeral, abstracto, compre recorrer aos conceptos de punto interior, punto fronteiro e punto exterior (ver a *Guía de Estudo* no Curso Virtual).

Función combinada

Busquemos unha expresión analítica da función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que ten o seguinte grafo:



Obviamente, non admite unha expresión única, compre definila *a trozos*. Interésanos definila, mantendo esta linguaxe imprecisa, en *trozos* abertos. Por exemplo, definir funcións $f_n, n \in \mathbb{Z}$, en cada aberto $U_n = (n-1, n+1)$: fariamos

$$f_{2n}(x) \;=\; 1 - |2n - x| \quad \text{e} \quad f_{2n+1}(x) \;=\; |2n + 1 - x|\,.$$

Como estas funcións coinciden na intersección de dous abertos U_n calquera, definen a función f por:

$$\boxed{f(x) = f_n(x) \quad \text{se} \quad x \in U_n\,.}$$

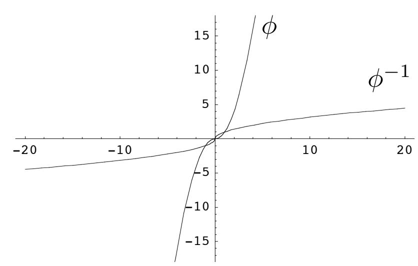
Homeomorfismos

Imos construír un homeomorfismo entre a bóla unitaria pechada en $\mathbb{R}^2$, $B_2[0,1]$, e o subconxunto A de $\mathbb{R}^2$ dado pola relación $|x| + |y| \leq 1$. (*Curiosidade*: O conxunto A sería a *bóla unitaria pechada* de utilizarmos a norma $\|\ \|_1$ en vez da norma usual $\|\ \|_2$; ver o *Obradoiro* de continuidade para a definición das normas $\|\ \|_k$).

En primeiro lugar, imos presentar unha forma sinxela e útil de construír funcións continuas $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Sexan $\phi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dúas funcións continuas. Definimos a función f por $f(x,y) = (\phi(x), \psi(y))$; é o *produto cartesiano* das funcións ϕ e ψ. Pódese comprobar o carácter continuo de f usando o criterio de continuidade secuencial ou compoñéndoa coas proxeccións coordenadas.

Sexa agora $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a función dada por

$$\phi(t) \;=\; \begin{cases} t^2 & \text{se} \quad t \geq 0\,, \\ -t^2 & \text{se} \quad t \leq 0\,. \end{cases}$$



Certamente é un homeomorfismo, a súa inversa é

$$\phi^{-1}(s) \;=\; \begin{cases} \sqrt{s} & \text{se} \quad s \geq 0\,, \\ -\sqrt{-s} & \text{se} \quad s \leq 0\,. \end{cases}$$

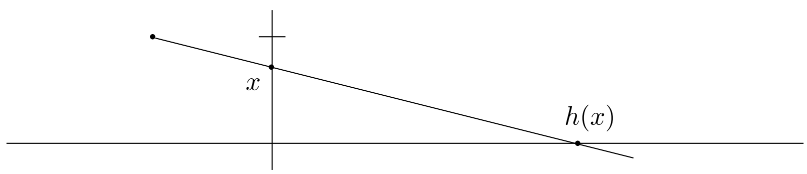
Dedúcese que a función $h(x,y) = (\phi(x), \phi(y))$ é un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en si mesmo. Afirmamos que a súa restrición a $B_2[0,1]$ é un homeomorfismo sobre o conxunto A. A comprobación é un exercicio.

Proxeczóns

Moitas transformacións continuas defínense mediante proxeczóns. Imos examinar algúns exemplos que se obteñen proxectando desde un punto.

5.8 Proxeczón dun intervalo

Vaise proxectar o intervalo $[0, 1)$, realizado sobre o eixo de ordenadas, sobre a semi-recta $[0, +\infty)$, identificada ao conxunto correspondente no eixo de abscisas. A función defínese proxectando desde o punto $(-1, 1)$, tal como se indica na figura:



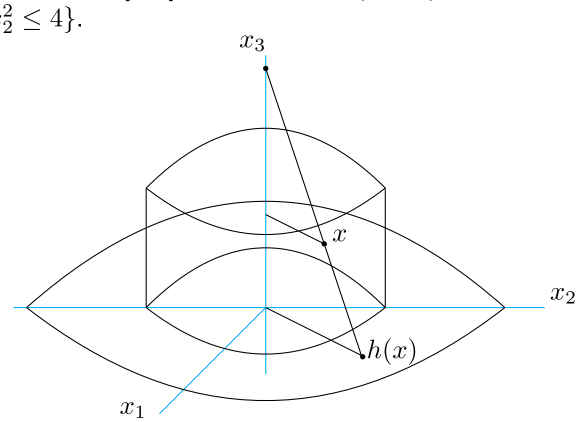
É doado calcular a expresión analítica da función $h\colon [0, 1) \to [0, +\infty)$ correspondente,

$$h(x) \;=\; \frac{x}{1-x}\,.$$

Unha construcción simétrica permite definir $k\colon (-1, 0] \to (-\infty, 0]$, e obter, como función combinada de ambas, un homeomorfismo entre $(-1, 1)$ e $\mathbb{R}$.

5.9 Proxeczón dun cilindro

Agora imos proxectar o cilindro $X = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ desde o punto $(0, 0, 2)$ de $\mathbb{R}^3$ sobre a coroa circular no plano $\mathbb{R}^2$, $Y = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$.



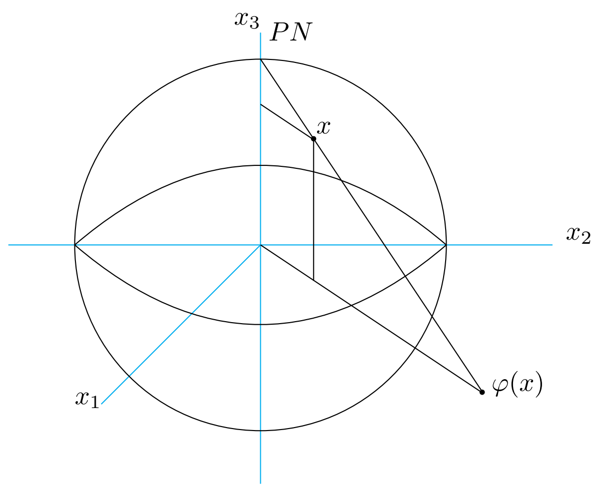
As coordenadas do punto imaxe, $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, serán da forma (ax_1, ax_2), para algún a positivo. Utilizando, por exemplo, semellanza de triángulos, é doado obter

$$h((x_1, x_2, x_3)) \;=\; (\frac{2x_1}{2-x_3}, \frac{2x_2}{2-x_3})\,.$$

Obtense, tamén neste caso, un homeomorfismo.

5.10 Proxeczón estereográfica

O prefixo *estereo-* provén do grego $stere\acute{o}s$, duro, sólido. Así, o termo estereografía refírese á representación de sólidos no plano. A proxeczón estereográfica consiste en proxectar desde o polo norte, PN, a esfera menos dito punto, $\mathbb{S}^2 - PN$, sobre o plano $\mathbb{R}^2$.



$$\varphi\colon \mathbb{S}^2 - \{PN\} \longrightarrow \mathbb{R}^2\,, \quad \varphi(x) = (\frac{x_1}{1-x_3}\,, \frac{x_2}{1-x_3})\,,$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3)$. A aplicación inversa vén dada por

$$\psi(x) = \frac{1}{1+\|x\|^2}\big(2x_1\,,\, 2x_2,\, \|x\|^2 - 1\big)\,.$$

Punto fixo

Unha *contracción* é unha función $f\colon X \to X$ tal que existe unha constante C, con $0 < C < 1$, verificando a desigualdade

$$d(f(x), f(y)) \,\leq\, C \cdot d(x, y)\,, x, y \in X\,.$$

Dada unha contracción $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, pódese construír unha sucesión da seguinte forma: escollemos un $x_1 \in \mathbb{R}^p$, arbitrario. Facemos $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots$ Da desigualdade anterior dedúcese, para $m \geq n$,

$$\|x_m - x_n\| \,\leq\, \frac{C^{n-1}}{1-C}\|x_2 - x_1\|\,,$$

e a sucesión é de Cauchy. O punto de converxencia, x_0, é un *punto fixo* de f, $f(x_0) = x_0$, e ademais é único.

Un teorema de punto fixo pódese interpretar como teorema de existencia de solución da ecuación $f(x) = x$. O resultado considerado ten a vantaxe de que permite obter solucións aproximadas co grao de aproximación que se requira. Ten a limitación de que a hipótese de ser f unha contracción é moi forte. Ver [1, páx. 188] para máis detalles.

Conexidade

Comezamos recordando un resultado clásico de Análise:

6.1 Teorema do Valor Intermedio (*Intermediate Value Theorem*)

Sexan $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función continua e $x_1, y_1 \in [a,b]$ tais que $f(x_1) < f(y_1)$. Sexa z un valor intermedio, $f(x_1) < z < f(y_1)$. Existe un $w \in [a,b]$ tal que $f(w) = z$.

Supoñamos $x_1 < y_1$. Dividimos o intervalo $[x_1, y_1]$ en dous intervalos iguais e escollemos a metade no que o extremo da esquerda teña imaxe menor ou igual que z e o da dereita, maior ou igual que z. Chamamos x_2, y_2 os extremos do novo intervalo. Iterando este proceso, construímos duas sucesións $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Ámbalas dúas sucesión son monótonas e limitadas, logo, converxentes. Como as distancias entre x_n e y_n converxen a cero, as dúas sucesións converxen a un mesmo punto. Este punto de converxencia é o w buscado. (Por que?).

A primeira noción de conexidade que imos estudar é a máis intuitiva e menos abstracta. Parte da idea de *camiño*; un conxunto será conexo se dous puntos calquera del se poden unir por un camiño.

6.2 Camiño (*Path*)

Un camiño no espazo X é unha función continua de dominio o intervalo unidade pechado e rango X,

$$\sigma\colon [0,1] \longrightarrow X\,.$$

A idea de camiño correspóndese con $\sigma(I)$, non coa aplicación. A precisión e outras razóns técnicas levan a definir camiño como función. Agora compre ser precabidos, precabidas: o conxunto $\sigma(I)$ pode diferir moito da idea que temos dun camiño. Por exemplo, o cadrado $I \times I$ é imaxe de I por unha función continua. Este é un feito importante, que debe poñernos en garda ante a intuición *naïf* . Neste caso, trátase de *curvas* construídas polo matemático italiano G. Peano (1858-1932). Nas páxinas 56-59 da referencia [2] encontrarás un método relativamente elemental para construír estas funcións.

6.3 Conexidade por camiños (*Path connectedness*)

Diremos que un espazo X (ou un conxunto $E \subset X$) é *conexo por camiños* ($\mathit{path\ connected}$) se para cada par de puntos $x, y \in X$ (resp., $x, y \in E$) existe un camiño $\sigma\colon I \to X$ (no seu caso, con $\sigma(I) \subset E$), tal que $\sigma(0) = x$ e $\sigma(1) = y$.

6.3.1 Exemplo

Un subconxunto E de $\mathbb{R}^p$ dise *convexo* se dados dous puntos $x, y \in E$, o segmento que os une está completamente contido en E. O segmento é o conxunto de puntos $\{z \in \mathbb{R}^p \mid z = (1-t)x + ty, 0 \leq t \leq 1\}$. A función $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^p$ dada por $\sigma(t) = (1-t)x + ty$ é un camiño entre x e y.

En $\mathbb{R}$, os únicos conxuntos conexos por camiños son os convexos; ou sexa, o baleiro, os conxuntos cun só punto, os intervalos, as semi-rectas e todo $\mathbb{R}$. Porque, polo Teorema do Valor Intermedio, se nun subconxunto E de $\mathbb{R}$ un camiño σ une dous puntos x e y, todos os puntos intermedios están en $\sigma(I) \subset E$.

6.4 Teorema

A imaxe continua dun espazo conexo por camiños é un espazo conexo por camiños.

En efeito, sexa $f\colon X \to Y$ unha función continua e sobrexectiva e X un espazo conexo por camiños. Dados dous puntos y_0 e y_1 de Y e dúas preimaxes deles, x_0 e x_1, existe un camiño σ en X con $\sigma(0) = x_0$ e $\sigma(1) = x_1$. A composición $f \circ \sigma$ é un camiño en Y entre os puntos dados.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ I \arrow[u, "\sigma"] \arrow[ur, "f \circ \sigma"'] & \end{tikzcd}$$

6.5 Corolario

A conexidade por camiños é unha propiedade topolóxica.

6.6 Produto de camiños

Dados dous camiños en X, σ e τ, verificando $\sigma(1) = \tau(0)$, defínese o camiño *produto*, $\sigma \cdot \tau$, por

$$\sigma \cdot \tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{se} \quad t \le 1/2\,, \\ \tau(2t-1) & \text{se} \quad t \ge 1/2\,. \end{cases}$$

O camiño produto comeza en $\sigma(0)$ e remata en $\tau(1)$.

6.7 Proposición

A unión de dous conxuntos E e F, conexos por camiños e con intersección non baleira, é un conxunto conexo por camiños.

Sexa x pertencente a E, y pertencente a F e $z \in E \cap F$. Para construír un camiño entre x e y pártese dun camiño en E entre x e z, outro entre z e y en F e faise o produto dos dous.

6.8 Exercicio

Demostrade que a esfera $\mathbb{S}^p$ é conexa por camiños.

6.9 Separación e conexidade (*Separation and connectedness*)

Outra forma de definir conexidade parte do concepto de *separación*. Dous subconxuntos U e V definen unha separación $(U \mid V)$ dun espazo X se U e V son os dous abertos e ademais

$$U \cup V = X \quad \text{e} \quad U \cap V = \emptyset\,.$$

Unha separación dise *non trivial* se $U \neq \emptyset \neq V$. En fin, un espazo é *conexo* se non admite ningunha separación non trivial. De forma equivalente, un espazo é conexo se non ten ningún subconxunto propio (ou sexa, diferente do baleiro e do total) ao tempo aberto e pechado.

6.9.1 Exemplo

Sexa z un punto de $\mathbb{R}$. Os conxuntos $(-\infty, z)$ e $(z, +\infty)$ constitúen unha separación de $\mathbb{R} - \{z\}$. En particular, todo subconxunto conexo de $\mathbb{R}$ ten que ser convexo.

6.10 Un criterio de conexidade

Un espazo X é conexo sse non existe ningunha aplicación continua e sobrexectiva de X sobre o espazo $\{0,1\}$.

Se existe $f\colon X \to \{0,1\}$, $(f^{-1}(0) \mid f^{-1}(1))$ é unha separación non trivial de X. Reciprocamente, se $(U \mid V)$ é unha separación non trivial de X, a función que en U toma o valor 0 e en V o valor 1 é continua e sobrexectiva.

Deste criterio e do Teorema do Valor Intermedio dedúcese que o intervalo $[0,1]$ é conexo.

6.11 Teorema

A imaxe continua dun espazo conexo é conexa.

Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to \{0,1\}$ son funcións continuas e sobrexectivas, a composición é tamén continua e sobrexectiva.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f \circ g"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & \{0,1\} \end{tikzcd}$$

6.12 Corolario

A conexidade é unha propiedade topolóxica.

6.13 Proposición

Todo espazo conexo por camiños é conexo.

Sexa X conexo por camiños. De non ser conexo, habería unha función continua de X sobre $\{0,1\}$. Un camiño unindo un punto de X con imaxe 0 e outro con imaxe 1 determinaría unha función continua do intervalo unidade sobre $\{0,1\}$.

Deste resultado e do Exemplo 6.9.1 dedúcese que en $\mathbb{R}$ ser conexo equivale a ser conexo por camiños e, xa que logo, a ser convexo. Aplicando agora o Teorema 6.11, conclúese que no Teorema do Valor Intermedio pódese substituír o intervalo pechado por calquera espazo conexo.

6.14 Teorema Xeral do Valor Intermedio

Sexa X un espazo conexo, $f\colon X \to \mathbb{R}$, unha función real continua con dominio X. Se f alcanza dous valores, alcanza calquera valor intermedio.

Este teorema caracteriza completamente aos espazos conexos. Efectivamente, do Criterio 6.10 séguese que un espazo coa propiedade do valor intermedio é necesariamente conexo.

O recíproco da Proposición 6.13 non é certo. Imos estudar un exemplo. Necesitamos algún resultado adicional:

6.15 Proposición

Sexa X un espazo, $(U \mid V)$ unha separación de X, E un subconxunto conexo. Daquela $E \subset U$ ou $E \subset V$.

6.16 Corolario

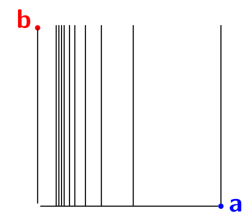
Se $E \subset X$ é un conxunto conexo e p é un punto de acumulación de E, a unión $E \cup \{p\}$ é un conxunto conexo. De forma máis xeral, se E é conexo, calquera conxunto F comprendido entre E e a súa adherencia, $E \subset F \subset \mathrm{Cl}(E)$, tamén é conexo.

6.17 O Espazo Peite $\mathcal{P}$ *(Comb Space)*

$\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1/n, 0 \leq y \leq 1\,, n \in \mathbb{N}\}$.

Traballaremos co espazo $X = \mathcal{P} - \{0\}$. Sexa $E = X - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$. Por ser conexo por camiños, E é conexo. Polo Corolario, X é conexo.

Supoñamos que exista un camiño σ en X entre os puntos $\mathbf{a} = (1,0)$ e $\mathbf{b} = (0,1)$. A imaxe do camiño ten que conter todos os puntos de X de coordenadas $(x,0)$, pois se quitamos un deles o espazo resultante non é conexo; para u comprendido estrictamente entre 0 e 1 unha separación non trivial de $X - \{(u,0)\}$ ven dada polos conxuntos



$$U = \{(x,y) \in X \mid x < u\}\,, \quad V = \{(x,y) \in X \mid x \geq u\}\,.$$

Polo tanto, a sucesión $\{(1/n, 0)\}$ está contida na imaxe de σ. Escollendo unha preimaxe t_n de cada un destes puntos, construímos unha sucesión no intervalo $[0,1]$. Esta sucesión terá unha subsucesión converxente a un certo punto $t_0 \in [0,1]$, e tería que ser $\sigma(t_0) = (0,0)$.

6.18 Compoñentes conexas *(Connected components)*

Dado un camiño σ en X comezando nun punto x e terminando nun punto y, defínese un novo camiño σ^{-1} (o camiño *inverso*) entre y e x da seguinte forma:

$$\sigma^{-1}(t) = \sigma(1-t)\,.$$

Usando esta construcción e o produto de camiños é doado comprobar que a seguinte é unha relación de equivalencia:

$$x \sim y \quad \text{se existe un camiño } \sigma \text{ verificando } \sigma(0) = x\,,\ \sigma(1) = y\,.$$

6.18.1 Exercicio

Demostrade que cada clase de equivalencia é un conxunto conexo por camiños.

Cada clase de equivalencia denomínase *compoñente conexa por camiños* (*path component*) do espazo X. Son os maiores subconxuntos conexos por camiños de X. O conxunto de todas elas denótase $\pi_0(X)$.

Nun espazo X pódese definir outra relación de equivalencia da seguinte maneira:

$x \sim y$ se existe un subconxunto conexo de X ao que pertencen x e y.

As súas clases de equivalencia son os maiores subconxuntos conexos do espazo. Denomínanse *compoñentes conexas* (*connected components*) de X.

6.18.2 Exercicio

Demostrade que cada compoñente conexa é un subconxunto pechado.

Lectura recomendada:

Chinn-Steenrod ([3]) *Primer teorema de existencia* (páx. 3-8 e 76-85)

Compacidade

Toda función real continua con dominio o intervalo pechado $[0,1]$ alcanza o máximo. Esta propiedade é común a todas as funcións reais continuas con dominio compacto, e, de feito, caracteriza a compacidade.

A compacidade ($compactness$) foi definida (e bautizada) por Fréchet, a principios do século XX. A súa definición foi a seguinte:

6.19 Compacidade segundo Fréchet

Un espazo K é compacto se toda sucesión encaixada de subconxuntos pechados non baleiros ten intersección non baleira:

dados $F_n, n \in \mathbb{N}$, conxuntos pechados, $F_n \neq \emptyset$, $F_n \supset F_{n+1}$, verifícase $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

A definición de compacidade usando coberturas abertas débese a Aleksandroff e Urysohn, por un lado, e ao colectivo de matemáticos franceses Nicolas Bourbaki, por outro.

A definición de Fréchet é equivalente á dada no curso: toda cobertura aberta enumerábel admite unha subcobertura finita. Se se parte da sucesión encaixada de conxuntos pechados non baleiros $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$, a colección de complementarios, $U_n = K - F_n$, é unha cobertura aberta sse $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$.

Algunhas propiedades asociadas á compacidade

Todo subconxunto pechado dun compacto é compacto.

A comprobación do carácter secuencialmente compacto do subconxunto é inmediata. O seguinte feito resulta directamente da definición de compacidade usando coberturas abertas:

A unión finita de conxuntos compactos é un conxunto compacto.

Unha función $f\colon X \to Y$ dise *pechada* se a imaxe directa de calquera subconxunto pechado do dominio é un subconxunto pechado do rango: $F \subset X$ pechado, implica $f(F) \subset Y$ pechado. Como a imaxe continua dun conxunto compacto é compacto, dedúcese:

Toda función continua con dominio compacto é pechada.

Da propiedade de que unha función é continua sse a imaxe recíproca de todo subconxunto pech rango é un subconxunto pechado do dominio dedúcese que, para unha función bixectiva, ser pechada equivale á propiedade de que a súa inversa sexa continua. Resulta:

Toda función continua e bixectiva con dominio compacto é un homeomorfismo.

A proxección 4.10 do cilindro sobre a coroa circular é un exemplo desta situación.

Continuidade uniforme

Unha función $f\colon X \to Y$ dise *uniformemente continua* se dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que se $d(x,y) < \delta$ entón $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Non toda función continua é uniformemente continua. Por exemplo, a función continua $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0\,, \\ 1 & \text{se} \quad x > 0\,, \end{cases}$$

non é uniformemente continua, pois hai puntos x e $-x$ tan próximos entre si como se queira, con $|f(x)-f(-x)| = 2$.

7.20 Lema

A imaxe dunha sucesión de Cauchy por unha función uniformemente continua é de Cauchy.

É doado de argumentar. Como aplicación, consideremos a función continua da semirecta $(0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$. A imaxe da sucesión $\{1/n\}$ non é de Cauchy, logo esta función non é uniformemente continua.

7.21 Teorema

Toda función continua $f\colon X \to Y$ con dominio compacto é uniformemente continua.

Imos supor que a condición non se cumpre para un $\varepsilon > 0$. Que non se satisfaga a condición de continuidade uniforme significa que dado un $\delta > 0$ arbitrario, existirán puntos x, y en X tais que $d(x,y) < \delta$ pero $d(f(x), f(y) \geq \varepsilon$.

Tomemos, en particular, $\delta = 1/n$. Existirán puntos x_n, y_n en X tais que

$$d(x_n, y_n) < 1/n\,, \quad \text{pero} \quad d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon\,.$$

Facendo isto para cada $n \in \mathbb{N}$, construiremos sucesións $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ verificando a condición anterior.

Pola hipótese de compacidade de X, $\{x_n\}$ ten unha subsucesión converxente, $\{x_{n_k}\} \to x_0$. Construímos a subsucesión $\{y_{n_k}\}$ cos mesmos índices. De $\{d(x_n, y_n)\} < 1/n$, dedúcese $\{d(x_{n_k}, y_{n_k})\} < 1/n_k \leq 1/k$, xa que $k \leq n_k$. Así, $\{d(x_{n_k}, y_{n_k})\} \to 0$ e, en consecuencia, $\{y_{n_k}\} \to x_0$.

Por outra parte, $d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon$ para todo k, polo que os límites das sucesións imaxe deben distar entre si polo menos ε. Pero, usando continuidade secuencial, estes límites son ambos iguais a $f(x_0)$.

Coberturas abertas e enumerabilidade

Toda cobertura aberta en $\mathbb{R}^p$ admite unha subcobertura enumerábel. Este feito permítenos usar unicamente coberturas enumerábeis ao tratar a compacidade nos espazos euclidianos. A comprobación, que se argumenta de seguido, é algo difícil, e se considera fóra de programa.

Sexa E un subconxunto de $\mathbb{R}^p$, $\mathcal{U} = \{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ unha cobertura aberta de E. Imos construír unha subcobertura enumerábel. Para cada punto $q \in \mathbb{R}^p$ con todas as coordenadas racionais consideramos as bólas abertas $B_p(q, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Esta colección de bólas é enumerábel, pois o conxunto $\mathbb{Q}^p \times \mathbb{N}$ é enumerábel. Para cada par (q,n) escollamos un U_λ, se existe algún, tal que $B_p(q, 1/n) \subset U_\lambda$, e designémolo por $U_{(q,n)}$. Estes conxuntos forman unha subcolección enumerábel de $\mathcal{U}$. Vexamos que é unha subcobertura.

Para cada $x \in E$ existe al menos un λ tal que $x \in U_\lambda$. Por ser aberto, existirá un $r > 0$ tal que $B_p(x,r) \subset U_\lambda$. Sexa n tal que $1/n < r/2$, e q un punto de $\mathbb{R}^p$ de coordenadas racionais e tal que $d(x,q) < 1/n$. Daquela $x \in B_p(q, 1/n) \subset B_p(x,r) \subset U_\lambda$, polo que existe un $U_{(q,n)}$ contendo x.

Lectura recomendada (para despois do exame):

Buskes-van Rooij([2]) *Curves in the Plane* (Cap. 4)