1.1 Topoloxía e Espazo topolóxico

Unha *topoloxía* τ nun conxunto X é unha colección de partes de X que verifica os catro ***axiomas*** seguintes:

$\tau 1$ O conxunto total X pertence a τ.

$\tau 2$ O conxunto baleiro $\emptyset$ pertence a τ.

$\tau 3$ Se $U_\lambda \in \tau$, con $\lambda \in \Lambda$, entón a súa unión $\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ tamén pertence a τ.

$\tau 4$ Se U e V pertencen a τ, $U \cap V$ tamén.

- Dada unha topoloxía τ nun conxunto X, o duplo (X, τ) chámase *espazo topolóxico*.
- Os conxuntos da topoloxía chámanse *conxuntos abertos*.

1.1.1 Exemplos de topoloxías

Topoloxía usual
A colección dos conxuntos abertos do espazo euclidiano foi o modelo para definir topoloxía. Denomínase *topoloxía usual* e denótase τ_u.

Topoloxía discreta e topoloxía trivial

- Para calquera conxunto X a familia $\tau = \mathbf{P}(X)$ de partes de X define a *topoloxía discreta*. Un espazo coa topoloxía discreta chamarase *espazo discreto*.
- A familia $\tau = \{\emptyset, X\}$ define a *topoloxía trivial* (ou *topoloxía indiscreta*). Un espazo coa topoloxía trivial dirase *espazo trivial*.

Espazo de Sierpinski
Sexa $S = \{0, 1\}$. $\tau = \{S, \emptyset, \{0\}\}$ é unha topoloxía en S. Con esta topoloxía S chámase *espazo de Sierpinski*.

Sexa $X = \{a, b, c\}$.

- $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ é unha topoloxía.
- Pola contra, a colección $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ non é unha topoloxía.

Recta de Kolmogoroff En $\mathbb{R}$ a colección

$$\tau_{\mathcal{K}} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty),\ a \in \mathbb{R}\}$$

é unha topoloxía. ($\mathbb{R}$, $\tau_{\mathcal{K}}$) denomínase *recta de Kolmogoroff*.

1.2 Conxuntos pechados

Dado un espazo topolóxico (X, τ) chámanse *conxuntos pechados* a aqueles conxuntos tales que o seu complementar é aberto.

As catro propiedades dos conxuntos pechados
Nun espazo topolóxico (X, τ) os conxuntos pechados teñen as seguintes propiedades:

F1 O conxunto baleiro $\emptyset$ é pechado.

F2 O espazo total X é pechado.

F3 A intersección dunha familia arbitraria de conxuntos pechados é un conxunto pechado.

F4 A unión de dous conxuntos pechados é un conxunto pechado.

Ademais, dado un conxunto X e unha familia de partes de X que verifique estas catro propiedades, esta familia é a colección de conxuntos pechados para unha topoloxía en X.

1.2.1 Topoloxías definidas por conxuntos pechados: exemplos

Topoloxía cofinita Sexa $\mathcal{F}$ a colección de subconxuntos de $\mathbb{R}$ formada polos conxuntos finitos e o propio $\mathbb{R}$. Verifica as catro propiedades dos conxuntos pechados, definindo a chamada *topoloxía cofinita*, τ_{co}: os conxuntos abertos son o baleiro e aqueles con complementar finito.

Defínese en calquera conxunto infinito X (se o conxunto fora finito a topoloxía así definida coincidiría coa discreta!).

Topoloxía cocompacta Considerade en $\mathbb{R}$ a familia formada polos conxuntos compactos coa topoloxía usual e máis a recta toda enteira. Verifica as catro propiedades dos conxuntos pechados, polo que determina unha topoloxía en $\mathbb{R}$, na que estes conxuntos son os pechados.

1.3 Base dunha topoloxía

Chámase ***base*** dunha topoloxía a un subconxunto β de τ coa seguinte propiedade:

$$\begin{cases} \text{dado } U \in \tau \text{ e } x \in U, \\ \\ \text{existe un } B \in \beta \text{ tal que } x \in B \text{ e } B \subset U \end{cases}$$

Fixada unha base β, os seus elementos chámanse *abertos básicos*.

Sexa β base dunha topoloxía en X. As seguintes condicións son equivalentes:

1. $U \subset X$ é aberto.
2. Para cada punto x de U existe un aberto básico B tal que $x \in B \subset U$.
3. O conxunto U escríbese como unión de abertos básicos.

A condición 2.,

para cada punto x de U existe un aberto básico B tal que $x \in B \subset U$

significa que, en función da base β, a topoloxía é a colección

$$\boxed{\tau = \{U \subset X \mid x \in U \Rightarrow \exists B \in \beta,\, x \in B \subset U\}}$$

A condición 3.,

o conxunto U escríbese como unión de abertos básicos

significa que a topoloxía é a colección

$$\boxed{\tau = \{U \subset X \mid U = \cup_{\lambda \in \Lambda_U} B_\lambda,\, B_\lambda \in \beta\}\,.}$$

Exemplos de bases

- A familia $\{\{x\},\ x \in X\}$ é unha base para a topoloxía discreta en X.
- A colección $\{(p, q) \mid p < q,\ p, q \in \mathbb{Q}\}$ é unha base para a topoloxía usual en $\mathbb{R}$.
- A colección $\{(p, +\infty), p \in \mathbb{Q}\}$ é unha base para a topoloxía de Kolmogorov.

Condicións para ser base dalgunha topoloxía
Dado un conxunto X e unha familia de subconxuntos β, β é base dalgunha topoloxía en X sse se cumpren as dúas condicións seguintes:

1. $\bigcup_{B \in \beta} B = X$
2. se $x \in B_1 \cap B_2$, sendo B_1 e B_2 elementos de β, existe un $B_3 \in \beta$ con $x \in B_3$ e $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Recta de Sorgenfrey. A seguinte colección de subconxuntos de $\mathbb{R}$,

$$\beta_S = \{[x, y) \mid x < y,\ x, y \in \mathbb{R}\}\,,$$

verifica as condicións anteriores, logo é base dunha topoloxía τ_S en $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R}, \tau_S)$ denomínase *recta de Sorgenfrey.*

Por contra, a colección $\{[x, y] \mid x < y,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ non é base de ningunha topoloxía: para os conxuntos $[x, y]$ e $[y, z]$ non se verifica a segunda condición do teorema.

Plano de Moore Denotemos por $\mathbf{\Gamma}$ o semiplano superior pechado en $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{\Gamma} = \{(x, y) \mid y \geq 0\}\,.$$

Sexa

$$\beta = \{B_2((x, y), r) \mid y > 0, r \leq y\} \cup \{\{(x, 0)\} \cup B_2((x, y), y) \mid y > 0\}\,.$$

É doado verificar que β é base dunha topoloxía en $\mathbf{\Gamma}$. O espazo topolóxico resultante denomínase *plano de Moore.*

1.4 Veciñanzas e base local

Unha *veciñanza* dun punto x nun espazo topolóxico X é un conxunto V que contén un subconxunto aberto contendo a x.
A colección $\mathcal{V}_x$ de todas as veciñanzas de x chámase *sistema de veciñanzas* de x.

$$\boxed{V \in \mathcal{V}_x \quad \Leftrightarrow \quad \exists U \in \tau\,,\; x \in U \subset V}$$

Exemplos e contra-exemplos O conxunto $(x - 1/n,\, x + 1/n)$ é unha veciñanza de x en $\mathbb{R}$ coa topoloxía usual.

Tamén o son os conxuntos $[x - 1/n,\, x + 1/n)$, $[x - 1/n,\, x + 1/n]$ ou $\mathbb{R}$ todo enteiro.

Analogamente, $[x, y)$, con $y > x$, é unha veciñanza de x na recta de Sorgenfrey.

Por contra, o conxunto $\{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ non é veciñanza do 0 en ningunha destas topoloxías.
E o conxunto $(-1, 0]$, tampouco.

A intersección finita de veciñanzas é unha veciñanza. Tamén, se $U \in \mathcal{V}_x$ e $V \supset U$, entón $V \in \mathcal{V}_x$.

Un subconxunto U dun espazo topolóxico X é aberto sse é veciñanza de cada un dos seus puntos.

Unha *base de veciñanzas* ou *base local* de x nun espazo topolóxico X é unha subcolección β_x do sistema de veciñanzas $\mathcal{V}_x$, tendo a propiedade de que todo $V \in \mathcal{V}_x$ contén algún $B \in \beta_x$.

Fixada unha base de veciñanzas de x, os seus elementos son chamados *veciñanzas básicas* de x.

Exemplos
O prototipo de exemplo de base local nun punto vén dado polas bólas de centro ese punto nun espazo euclidiano.

Non é necesario consideralas todas: en $\mathbb{R}^p$ as bólas abertas $\{B_p(x,\, 1/n),\; n \in \mathbb{N}\}$ forman unha base local en x.

Analogamente, na recta de Sorgenfrey a colección $\{[x,\, x + 1/n),\; n \in \mathbb{N}\}$ é unha base local en x.

Relación entre base e base local
Sexa β base dunha topoloxía τ en X. Daquela, para cada punto $x \in X$ a colección $\beta_x = \{U \in \beta \mid x \in U\}$ é unha base local.

Reciprocamente, se para cada $x \in X$ temos unha base local β_x formada por conxuntos abertos, daquela

$$\boxed{\beta = \bigcup_{x \in X} \beta_x\,,}$$

é unha base da topoloxía de X.

Caracterización local dos conxuntos abertos Un subconxunto U dun espazo topolóxico X é aberto sse contén unha veciñanza básica de cada un dos seus puntos.

1.5 Interior, adherencia, fronteira

- Existe unha veciñanza V_x de x completamente contida en E, ou sexa,

$$\boxed{\exists V_x \in \mathcal{V}_x, \quad V_x \subset E\,.}$$

- Existe unha veciñanza V_x de x completamente contida no complementar de E, ou sexa,

$$\boxed{\exists V_x \in \mathcal{V}_x, \quad V_x \subset X - E\,.}$$

- Non ocorre ningunha das condicións anteriores, ou sexa,

$$\boxed{\forall V_x \in \mathcal{V}_x, \quad \begin{cases} V_x \cap (X - E) \neq \emptyset \\ \\ V_x \cap E \neq \emptyset \end{cases}}$$

Se $\exists V_x \in \mathcal{V}_x, \quad V_x \subset E$, diremos que x é un *punto interior* de E. O conxunto de todos eles, $\mathrm{Int}(E)$, denomínase *interior* de E. Tamén se denota $\overset{\circ}{E}$.

Se $\exists V_x \in \mathcal{V}_x, \quad V_x \subset X - E$, diremos que x é un *punto exterior* de E. O conxunto de todos eles, $\mathrm{Ext}(E)$, denomínase *exterior de* E. Obviamente $\mathrm{Ext}(E) = \mathrm{Int}(X - E)$.

Se

$$\forall V_x \in \mathcal{V}_x,\ V_x \cap (X - E) \neq \emptyset \text{ e } V_x \cap E \neq \emptyset\,,$$

diremos que x é un *punto fronteiro* de E. O conxunto de todos eles, $\mathrm{Fr}(E)$, denomínase *fronteira* de E. Tamén se denota $\partial(E)$.

Os tres conxuntos son disxuntos e

$$X \ = \ \mathrm{Int}(E) \cup \mathrm{Fr}(E) \cup \mathrm{Ext}(E)\,.$$

Propiedades do interior dun conxunto

- Se U é un conxunto aberto e $U \subset E$, entón $U \subset \mathrm{Int}(E)$.
- O conxunto $\mathrm{Int}(E)$ é aberto.
- $\mathrm{Int}(E)$ é a unión de todos os conxuntos abertos contidos en E.
- O interior de E é o *maior conxunto aberto* contido en E.

Adherencia Xa que $\mathrm{Ext}(E)$ é aberto, o seu complementar, $\mathrm{Int}(E) \cup \mathrm{Fr}(E)$, é un conxunto pechado, e contén a E. Denomínase *adherencia* de E e se denota $\mathrm{Cl}(E)$. Tamén se denota $\overline{E}$. Os puntos de $\mathrm{Cl}(E)$ denomínanse *puntos adherentes*.

$$\boxed{\mathrm{Cl}(E) \,=\, \mathrm{Int}(E) \cup \mathrm{Fr}(E)}$$

A adherencia, $\mathrm{Cl}(E)$, é o menor conxunto pechado contendo E. É a intersección de todos os conxuntos pechados que conteñen E.

$$\mathrm{Fr}(E) \,=\, \mathrm{Fr}(X - E) \,=\, \mathrm{Cl}(E) \cap \mathrm{Cl}(X - E)\,.$$

Puntos de acumulación
Dicimos que x é un *punto de acumulación* de E se toda veciñanza de x contén un punto de E distinto de x. Ou sexa, se se verifica:

$$\boxed{V \in \mathcal{V}_x \;\Rightarrow\; (V - \{x\}) \cap E \,\neq\, \emptyset}$$

O conxunto E' de todos os puntos de acumulación de E chámase *conxunto derivado.*

Sexa X un espazo topolóxico e E un subconxunto de X. Cúmprese:

$$\boxed{\mathrm{Cl}(E) = E \cup E'\,.}$$

Un conxunto nun espazo topolóxico é pechado sse contén todos os seus puntos de acumulación.

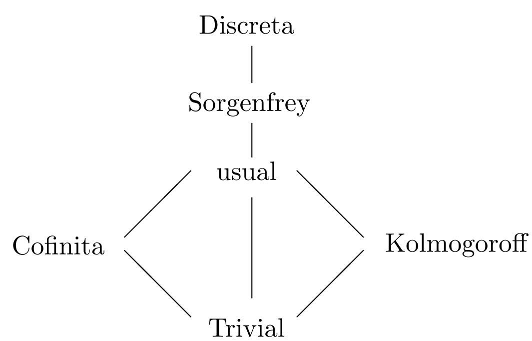
Puntos illados
Dicimos que $x \in E$ é un *punto illado* de E se existe unha veciñanza de x que non contén ningún outro punto de E.

1.6 Comparación de topoloxías

Sexa $\mathbf{P}(X)$ o conxunto de partes de X. Unha topoloxía en X é un subconxunto τ de $\mathbf{P}(X)$ con certas propiedades. Se consideramos a relación de inclusión en $\mathbf{P}(X)$ podemos *comparar* topoloxías en X.

Dadas dúas topoloxías τ_1 e τ_2 nun conxunto X, diremos que τ_1 é *máis fina* que τ_2, e escribiremos $\tau_2 \leq \tau_1$, se $\tau_2 \subset \tau_1$ como subconxuntos de $\mathbf{P}(X)$. Tamén diremos, nesta situación, que τ_2 é *menos fina* que τ_1.

Ás veces é útil debuxar diagramas como o seguinte, onde se comparan diversas topoloxías en $\mathbb{R}$:



Para saber se unha topoloxía é máis fina que outra chega con comparar bases de veciñanzas. É o que se chama *criterio de comparación de Hausdorff*.

Dadas dúas topoloxías τ_1 e τ_2 nun conxunto X, τ_1 é máis fina que τ_2 sse, *para cada punto* $x \in X$, cada elemento dunha base local de x en (X, τ_2) contén un elemento dunha base local de x en (X, τ_1).

2.1 Funcións continuas

1 Definición *Sexan* (X, τ_X) *e* (Y, τ_Y) *espazos topolóxicos. Diremos que unha aplicación* $f : X \to Y$ *é* continua *nun punto* x_0 *do seu dominio se se verifica calquera das seguintes condicións:*

- *Para toda veciñanza* V *de* $f(x_0)$ *existe unha veciñanza* U *de* x_0 *tal que* $f(U) \subset V$.
- *Para toda veciñanza* V *de* $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ *é unha veciñanza de* x_0 .

Diremos que f *é unha* aplicación continua *se é continua en todos os puntos do seu dominio.*

Dados espazos topolóxicos X e Y, o conxunto de aplicacións continuas de dominio X e rango Y
denótase

$$\boxed{\mathrm{Map}\,(X, Y)}$$

A aplicación identidade,

$$id_X : (X, \tau_X) \longrightarrow (X, \tau_X)\,,$$

é continua.

2.1.1 Composición de funcións continuas

1 Teorema *Sexan* X, Y *e* Z *espazos topolóxicos,* $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$. *Sexan* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$ *aplicacións. Se* f *é continua en* x_0 *e* g *é continua en* y_0*, daquela a composición* $g \circ f$ *é continua en* x_0.

En particular, a composición de aplicacións continuas é unha aplicación continua.

2.1.2 Continuidade global

2 Teorema *Dados espazos topolóxicos* $(X,\, \tau_X)$ *e* $(Y,\, \tau_Y)$ *e unha aplicación* $f : X \to Y$*, as seguintes condicións son equivalentes:*

1. f *é continua.*
2. *Para cada* $V \in \tau_Y$, $f^{-1}(V) \in \tau_X$.
3. *Fixada unha base da topoloxía de* Y*, a imaxe recíproca de cada aberto básico é un aberto de* X.
4. *Se* F *é un conxunto pechado de* Y, $f^{-1}(F)$ *é un conxunto pechado de* X.
5. *Se* $E \subset X$, $f(\mathrm{Cl}(E)) \subset \mathrm{Cl}(f(E))$.

2.2 Topoloxía relativa: subespazos

2 Definición *Sexa (X,τ) un espazo topolóxico, E un subconxunto de X. A colección de interseccións de abertos de X con E forman unha topoloxía τ_E en E, denominada* topoloxía relativa*,*

$$\boxed{\tau_E = \{U \subset E \mid \exists V \in \tau,\, U = V \cap E\}\,.}$$

O espazo topolóxico resultante, (E,τ_E), denomínase subespazo *de X.*

Aplicación inclusión
Sexa (X,τ) un espazo topolóxico, E un subespazo. A aplicación inclusión

$$i\colon E \longrightarrow X$$

é continua.

1 Proposición *Sexa E un subespazo de X. Se β é unha base da topoloxía de X, daquela a colección*

$$\boxed{\beta_E = \{V \cap E,\ V \in \beta, V \cap E \neq \emptyset\}}$$

é unha base da topoloxía de E.

Sexa E un subespazo de X, $A \subset E$. Conservando a notación $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Cl}(A)$ e $\mathrm{Fr}(A)$ para interior, adherencia e fronteira en X, denotaremos por

$$\mathrm{Int}_E(A), \quad \mathrm{Cl}_E(A) \quad \text{e} \quad \mathrm{Fr}_E(A)$$

os respectivos conceptos en E.

2 Proposición *Sexa $A \subset E \subset X$.*

1. $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}_E(A)$
2. $\mathrm{Cl}(A) \cap E = \mathrm{Cl}_E(A)$
3. $\mathrm{Fr}_E(A) \subset \mathrm{Fr}(A)$

2.2.1 Restrición de funcións

Restrición Sexa $f : X \to Y$ unha aplicación, E un subespazo de X, $i : E \to X$ a inclusión. A *restrición* de f a E,

$$f\,|_E = f \circ i : E \to Y\,,$$

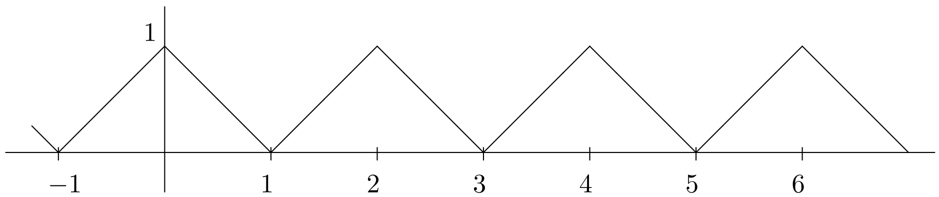
é continua, como composición de dúas aplicacións continuas.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f\,|_E"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Se a restrición ao subespazo E é continua, a función $f\colon X \to Y$ é continua nos puntos de E?

2.2.2 Función combinada

Función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con grafo:



Definimos funcións $f_n, n \in \mathbb{Z}$, en cada aberto $U_n = (n-1, n+1)$:

$$f_{2n}(x) \;=\; 1 - |2n - x| \quad \text{e} \quad f_{2n+1}(x) \;=\; |2n + 1 - x| \,,$$

e a función f por:

$$\boxed{f(x) = f_n(x) \quad \text{se} \quad x \in U_n \,.}$$

Sexan X e Y conxuntos, $\{A_i,\, i \in I\}$ unha cobertura de X con índices nun conxunto I, $\{f_i : A_i \to Y,\, i \in I\}$ unha familia de aplicacións tales que

$$\boxed{f_i\,|_{A_i \cap A_j} = f_j\,|_{A_i \cap A_j}}$$

para todo par de índices $i, j \in I$. Definimos unha nova aplicación $f : X \to Y$ da seguinte maneira:

$$\boxed{f(x) \;=\; f_i(x) \text{ se } x \in A_i \,.}$$

Esta aplicación denomínase *aplicación combinada* da familia $\{f_i\}$.

3 Proposición
- *A aplicación combinada dunha familia de aplicacións continuas tales que os seus dominios formen unha cobertura aberta dun espazo X é unha aplicación continua.*
- *A aplicación combinada dunha familia de aplicacións continuas tales que os seus dominios formen unha cobertura pechada e finita dun espazo X é unha aplicación continua.*

3.1 Métrica e espazo métrico

Definición
Unha *métrica* nun conxunto M é unha aplicación d con valores reais

$$\boxed{d\colon M \times M \longrightarrow \mathbb{R}}$$

que a un punto (x, y) de $M \times M$ asocia o número $d(x, y)$, de xeito que se verifiquen as tres condicións seguintes:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ sse $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)\,, \quad x, y \in M$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)\,, \quad x, y, z \in M$.

O par (M, d) formado por un conxunto M e unha métrica nel, d, denomínase *espazo métrico*.

Métrica discreta

Nun conxunto non baleiro M calquera defínese a chamada *métrica discreta*,

$$d_S\colon M \times M \longrightarrow \mathbb{R},$$

dada por:

$$d_S(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = y, \\ 1 & \text{se} \quad x \neq y. \end{cases}$$

3.1.1 Métricas en $\mathbb{R}^n$

Métricas destacads en $\mathbb{R}^n$:
a métrica d_1,

$$\boxed{d_1(x, y) \;=\; \textstyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\,,}$$

a métrica d_2,

$$\boxed{d_2(x, y) \;=\; \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,,}$$

e a métrica d_∞,

$$\boxed{d_\infty(x, y) \;=\; \max_{1 \leq i \leq n}\{|x_i - y_i|\}\,,}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Analogamente, para cada enteiro natural $k \in \mathbb{N}$ defínese:

$$\boxed{d_k(x,y) \;=\; \left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^k\right\}^{1/k} \,,}$$

Desigualdade de Minkowski:

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k\right\}^{1/k} \;\leq\; \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{1/k} \;+\; \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right\}^{1/k} \,,$$

onde a_i e b_i son números non negativos.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, cúmprese

$$\boxed{d_\infty(x,y) \;\leq\; d_k(x,y) \;\leq n^{1/k} d_\infty(x,y)\,.}$$

Dedúcese que $d_\infty(x,y) = \lim_{k\to\infty} d_k(x,y)$

En fin, cúmprense tamén as desigualdades

$$\boxed{d_\infty(x,y) \;\leq\; d_2(x,y) \;\leq\; d_1(x,y) \;\leq n \cdot d_\infty(x,y)\,.}$$

3.1.2 Métricas no espazo de funcións

$\mathcal{C}(I)$: espazo vectorial das funcións reais continuas do intervalo unidade $I = [0,1]$; nel imos definir dúas métricas.

A primeira, $\rho_\infty\colon \mathcal{C}(I)\times\mathcal{C}(I)\to\mathbb{R}$, vén dada por:

$$\boxed{\rho_\infty(f,g) \;=\; \sup_{x\in I}\{|f(x)-g(x)|\}}$$

É a chamada *métrica da converxéncia uniforme* ou "métrica do supremo".

Defínese tamén sobre espazos máis xerais. Por exemplo, no espazo vectorial $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$, de funcións reais limitadas con dominio un conxunto arbitraio X.

A segunda métrica é:

$$\boxed{\rho_1(f,g) \;=\; \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx}$$

Denomínase *métrica* L^1.

3.1.3 Bólas e relacións métricas

Bólas en (M, d)

$$\boxed{B_M(x, r) \;=\; \{y \in M \mid d(x, y) < r\}}$$

$$\boxed{B_M[x, r] \;=\; \{y \in M \mid d(x, y) \leq r\}}$$

Distancia entre conxuntos

Dados dous conxuntos non baleiros A e B nun espazo métrico (M, d), chámase *distancia entre os conxuntos* A e B, e se denota $d(A, B)$, ao número

$$\boxed{d(A, B) \;=\; \inf\{d(x, y),\, x \in A, y \in B\}}$$

Cando un dos conxuntos se reduce a un punto fálase de *distancia do punto ao conxunto* e se escribe $d(x, A)$. Cúmprese

$$\boxed{|d(x, A) - d(y, A)| \;\leq\; d(x, y)}$$

Conxunto limitado. Diámetro

Un conxunto A nun espazo métrico (M, d) dise *limitado* se está contido nalgunha bóla,

$$\boxed{\exists B_M(x, r) \text{ tal que } A \subset B_M(x, r)}$$

Chámase *diámetro* dun conxunto non baleiro A, e se denota $\delta(A)$, ao número

$$\delta(A) \;=\; \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\},$$

cando existe. Se tal supremo non existe, dise que o diámetro é infinito, e escríbese

$$\delta(A) = \infty\,.$$

Métricas limitadas

Sexa (M, d) un espazo métrico. A fórmula

$$\boxed{\overline{d}(x,y) \;=\; \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}}$$

define unha nova métrica sobre M.

É unha *métrica limitada*, o espazo total é un conxunto limitado.

Outra métrica limitada é

$$\boxed{d_0(x,y) \;=\; \min\{d(x,y),1\}\,.}$$