Espazos métricos

16/17 de outubro de 2017

5.1 Demostrade que as condicións da definición de métrica son equivalentes ás seguintes:

1. Para todo par de elementos $x, y \in M$, $d(x,y) = 0$ sse $x = y$.
2. $d(y,z) \leq d(x,y) + d(x,z)$, para x, y, z elementos de M.

5.2 (E 4) Considerade a función $d^\flat \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d^\flat(x,y) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{se} \quad x_1 = y_1 \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{se} \quad \text{non} \end{cases}$$

onde $x = (x_1, x_2)$, e $y = (y_1, y_2)$.

1. Demostrade que é unha métrica (denomínase *métrica do bosque*)
2. Achade unha base local en cada punto do espazo

5.3 (E 2) Sexan d_1 e d_2 métricas en M. Estudade se as seguintes son ou non métricas:

a) $d_M(x,y) = \text{máx}\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$

b) $d_m(x,y) = \text{mín}\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$

c) $d^2(x,y) = (d_1(x,y))^2$.

5.4 Comprobade que a seguinte é unha métrica limitada en $\mathbb{R}$:

$$d(x,y) = |\arctan x - \arctan y| .$$

Interpretádea xeometricamente.

5.5 Sexa (X,d) un espazo métrico.

1. Demostrade que toda bóla aberta é unión de bólas pechadas.
2. Demostrade que toda bóla pechada é intersección de bólas abertas.
3. Demostrade que todo conxunto dun só punto é intersección de bólas pechadas. En consecuencia, que é un conxunto pechado.

5.6 Sexa (M,d) un espazo métrico, x un punto de M e $r > 0$. Sexa $F = M - B_M(x,r)$. Demostrade que se $d(y,F) = 0$, entón $y \in F$.

5.7 Sexa $B_M(x,r)$ unha bóla nun espazo métrico (M,d). Sexa A un subconxunto de M de diámetro menor que r, $\delta(A) < r$, e tal que $A \cap B_M(x,r) \neq \emptyset$. Probade que A está contido en $B_M(x,2r)$.

5.8 (E 5) Sexan A e B subconxuntos non baleiros de M, con diámetro finito. Demostrade

1. $\delta(A) = 0$ se, e só se, A ten un único elemento.
2. $A \subset B \Rightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$.
3. $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.
4. $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$.

5.9 Sexa $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ o conxunto de partes de $\mathbb{N}$. Sexan $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definimos unha función

$$d\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

por: $d(A,B) = 0$ se $A = B$; noutro caso, $d(A,B) = 1/m$, sendo m o menor enteiro que está nun conxunto pero non no outro, $m = \text{mín}\{(A - B) \cup (B - A\}$.

1. Establecede a equivalende $d(A,B) < 1/m \iff [1,m] \cap A = [1,m] \cap B$.
2. Comprobade que é unha métrica
3. Demostrade que a aplicación $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ que a A asocia o seu complementar $\mathbb{N} - A$ é unha isometría

5.10 (E 3) Definimos funcións $\delta'\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\delta''\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$\delta'(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{se } x,y < 0 \text{ ou } x,y \geq 0\,, \\ 1 + |x-y| & \text{noutro caso} \end{cases}$$

e

$$\delta''(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{se } x,y \leq 0 \text{ ou } x,y > 0\,, \\ 1 + |x-y| & \text{noutro caso} \end{cases}$$

1. Comprobade que son métricas
2. Achade as bólas abertas de centros 0, 1 e -1 e raio $1/2$
3. Considerade $(\mathbb{R}, \delta')$ e $(\mathbb{R}, \delta'')$ e construíde un homeomorfismo entre os espazos topolóxicos correspondentes
4. Son as métricas δ' e δ'' topoloxicamente equivalentes?

5.11 Sexa $d_{\mathbb{Z}}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a función

$$d_{\mathbb{Z}}(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{se } [x] = [y]\,, \\ 1 & \text{noutro caso,} \end{cases}$$

onde $[x]$ denota «parte enteira de x».

1. Comprobade que é unha métrica en $\mathbb{R}$
2. Achade bases locais en cada punto da recta

5.12 (E 1) Sexan X e Y espazos métricos, $f\colon X \to Y$ unha función continua. Sexan $a, b \in Y$ dous puntos distintos. Sexa $E = f^{-1}(a)$, $F = f^{-1}(b)$. Demostrade que se $d(E,F) = 0$, daquela a función f non é uniformemente continua. Procurade un exemplo.