Metrizabilidade e numerabilidade

23/24 de outubro de 2017

6.1 (E 2) Considerade a recta coa topoloxía τ_{coe}, onde os pechados son $\mathbb{R}$ e os conxuntos finitos ou enumerábeis.

1. Demostrade que $\{x_n\} \to x_0$ sse existe un enteiro n_0 tal que se $n \geq n_0$, $x_n = x_0$.
2. Dado $x_0 \in \mathrm{Cl}(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, existe $\{x_n\} \subset (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ converxendo a x_0?
3. Do anterior, podedes concluír sobre o carácter $1^{\underline{0}}$ enumerábel de $(\mathbb{R}, \tau_{coe})$?

6.2 Demostrade que nun espazo topolóxico X cada conxunto $\{x\}$ é pechado sse cada base local β_x verifica $\cap_{V \in \beta_x} V = \{x\}$.

6.3 (E 4) Sexa X un espazo primeiro numerábel. Probade que se toda sucesión que converxe o fai a un único punto, daquela X é Hausdorff. É certo de non ser X primeiro enumerábel?

6.4 (E 1) Sexa X un espazo Hausdorff, E un subconxunto de X. Demostrade que un punto x de X é punto de acumulación de E sse toda veciñanza de x contén unha infinidade de puntos de E. É certo nun espazo topolóxico calquera?

6.5 Discutide o carácter Hausdorff de $\mathbb{R}$ coa topoloxía cocompacta (na que os conxuntos pechados son $\mathbb{R}$ e os compactos da topoloxía usual).

6.6 Probade que nun espazo segundo enumerábel todo subconxunto discreto é finito ou enumerábel.

6.7 (E 3) Sexa X un espazo topolóxico, E un conxunto denso en X e U un subconxunto aberto de X. Probade que $U \subset \mathrm{Cl}(E \cap U)$.

Sexan agora U, V dous conxuntos abertos e densos. Concluíde que $U \cap V$ tamén é denso.

6.8 Sexa $E \subset \mathbb{R}$ un subconxunto denso para a topoloxía usual. Demostrade que a colección

$$\beta = \{(x, y), x < y, x, y \in E\}$$

é unha base. É certo nalgún caso se E non é denso?

6.9 (E 5) Sexa X un espazo topolóxico, $E \subset X$. Demostrade que as seguintes condicións son equivalentes:

1. $\mathrm{Int}(\overline{E}) = \emptyset$
2. E está contido nun pechado con interior baleiro
3. $X - E$ contén un aberto denso
4. $\mathrm{Int}(X - E)$ é denso.

6.10 Demostrade que a imaxe continua dun espazo topolóxico separábel é separábel.

6.11
Sexa $\mathbf{\Gamma}$ o Plano de Moore.

1. Estudade se este espazo é segundo enumerábel
2. Sexa $E \subset \mathbf{\Gamma}$ o conxunto de puntos de coordenadas racionais. É un subconxunto denso?
3. É $\mathbf{\Gamma}$ un espazo metrizábel?

6.12 Neste exercicio considérase sempre a topoloxía usual.

1. Construíde unha aplicación sobrexectiva de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ que restrinxida a $\mathbb{Q}^2$ sexa un mergullo.
2. Demostrade que dous subconxuntos enumerábeis e densos de $\mathbb{R}$ son homeomorfos; e que se pode construír o homeomorfismo de xeito que se estenda a todo $\mathbb{R}$.
   (Algo difícil; procurade unha bixección entre os subconxuntos dados, que conserve a orde)
3. Concluíde que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^2$ son homeomorfos.