EXPOSICIÓN: **Aplicacións lineares** [Equipo 5] 30/31 de outubro de 2017

Aplicacións lineares entre espazos vectoriais normados de dimensión finita

Traballaremos con espazos vectoriais reais; os mesmos resultados son válidos para espazos vectoriais complexos: a norma define tamén unha norma do espazo real subxacente, e ambos son idénticos como espazos métricos. Nun primeiro momento imos considerar a norma euclidiana.

As aplicacións lineares son lipschitzianas e, pois, continuas. En efecto, sexa $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha aplicación linear. Sexa A a matriz asociada a f e ás bases usuais en $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$. Así, $f(\mathbf{x}) = \mathsf{A}\cdot\mathbf{x}$. É doado comprobar que se cumpre a desigualdade

$$\boxed{\|\,\mathsf{A}\cdot\mathbf{x}\,\|_2 \leq \|\,\mathsf{A}\,\|_2 \cdot \|\,\mathbf{x}\,\|_2\,,}$$

onde $\|\,\mathsf{A}\,\|_2$ é a norma da matriz asociada, considerada como o punto de $\mathbb{R}^{nm}$ con coordenadas as entradas da matriz, colocadas unha fila tras outra. En efecto, para un punto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ con imaxe $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = (y_1, \dots, y_m)$, temos

$$|y_i| \;=\; |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j| \;\leq\; \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}\,,$$

usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, onde $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ trátase coma un vector de $\mathbb{R}^n$.

Dise que dúas normas nun espazo vectorial V, $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, son *lipschitzianamente equivalentes* se existen constantes k_1, k_2 tais que se verifica para todo $x \in V$,

$$\|x\|_1 \leq k_1 \cdot \|x\|_2\,; \quad \|x\|_2 \leq k_2 \cdot \|x\|_1\,.$$

7.1 Proposición No espazo vectorial $\mathbb{R}^n$ todas as normas son lipschitzianamente equivalentes.

Demostraremos que calquera norma $\|\ \|$ en $\mathbb{R}^n$ é equivalente á norma euclidiana $\|\ \|_2$. Sexa $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Para un vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ tense

$$\|\mathbf{x}\| \;=\; \|\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\| \;\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\cdot\|\mathbf{e}_i\| \;\leq a\sum_{i=1}^{n} |x_i|\,,$$

onde $a = \text{máx}_{1\leq i\leq n}\|\mathbf{e}_i\|$. Da desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada aos vectores $\mathbf{x}$ e $(1, 1, \dots, 1)$ dedúcese $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2$, e, pois,

$$\|\mathbf{x}\| \;\leq\; a\sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2\,.$$

Esta relación implica que a función $\|\ \|\colon (\mathbb{R}^n, \|\ \|_2) \to \mathbb{R}$ é continua. Como a esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$ coa topoloxía euclidiana é compacta e esta función toma nela valores estritamente positivos, existirá unha constante $b > 0$ tal que $\|y\| \geq b$ para todo $y \in \mathbb{S}^{n-1}$. Así, para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ cúmprese

$$\|\mathbf{x}\| \;=\; \left\|\|\mathbf{x}\|_2\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2}\right\| \;=\; \|\mathbf{x}\|_2\left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2}\right\| \;\geq\; b\cdot\|\mathbf{x}\|_2\,.$$

Isto completa a proba.

7.2 Corolario Todo espazo vectorial normado de dimensión finita é completo.

7.3 Teorema Toda aplicación linear entre espazos vectoriais normados de dimensión finita é continua.

Aplicacións lineares xerais

Agora imos, primeiro, presentar unha aplicación linear non continua. O seu dominio vai ser un espazo vectorial normado de dimensión infinita. E, segundo, establecer algún criterio que permita caracterizar a continuidade das aplicacións lineares.

7.4 Contraexemplo Sexa $\mathcal{P}$ o conxunto dos polinomios reais de unha variábel real. Certamente, a suma de polinómios e o produto dun polinomio por un número real definen unha estrutura de espazo vectorial en $\mathcal{P}$. Cada polinomio p define unha aplicación continua do intervalo unidade I en $\mathbb{R}$,

$$p(x) \;=\; a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0,\; x \in I\,.$$

Imos considerar $\mathcal{P}$ como subespazo do espazo vectorial normado $\mathcal{C}(I)$, coa norma do supremo,

$$\|p\|_\infty \;=\; \sup_{x\in I}\{|p(x)|\}\,.$$

En xeral, para $x \in \mathbb{R}$, defínese a función *avaliación* av_x por $av_x(p) = p(x)$. Imos considerar $av_2 \colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$,

$$av_2(p) \;=\; p(2)\,.$$

av_2 é unha aplicación linear: $av_2(p_1 + p_2) = av_2(p_1) + av_2(p_2)$, $av_2(k\cdot p) = k\cdot av_2(p)$. Trátase de ver que non é continua no 0. Para iso, pódese utilizar o criterio da continuidade secuencial, coa axuda da sucesion $\{p_n\}$ de polinómios, onde

$$p_n(x) = (\frac{x}{2})^n\,.$$

En efecto, $\lim_{n\to\infty} p_n = p_0$, onde p_0 é o polinomio identicamente nulo, pois $\|p_n\|_\infty = 1/2^n$. Por contra, $\lim_{n\to\infty} av_2\,(p_n) = 1$.

7.5 Teorema Sexan E, F espazos vectoriais normados, $f\colon E \to F$ unha aplicación linear. As seguintes afirmacións son equivalentes:

1. f é continua.
2. f é continua no punto 0.
3. Existe $k > 0$ tal que $\|f(x)\|_F \le k\cdot\|x\|_E$ para todo $x \in E$.
4. Existe $k > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\|_F \le k\cdot\|x - y\|_E$ para calquera $x, y \in E$.

Proba.- Para demostrar 2) $\Rightarrow$ 3), tomemos $\varepsilon = 1$ e sexa $\delta > 0$ tal que

$$\|x\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x)\|_F < 1\,.$$

Compróbase que calquera k con $0 < 1/k < \delta$ verifica a condición requerida. En efecto, para calquera $x \in E$, $f(\frac{x}{k\|x\|}) < 1$.

Tendo en conta a linearidade de f, a condición 4) é idéntica á 3) aplicada ao vector $x - y$. En fin, a condición 4), lida como relación entre distancias, é a condición de Lipschitz.

Observade que o anterior teorema expresa a equivalencia, para unha aplicación linear, entre continuidade, continuidade no punto 0*, continuidade uniforme e carácter lipschitziano.*

7.6 Corolario Unha aplicación linear $f\colon E \to F$ é continua sse é limitada na esfera unitaria $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ do espazo E.

7.7 Exercicio Considerade o espazo $\mathcal{C}(I)$ coa métrica L^1. Para cada $x \in I$, definimos a *función avaliación* av_x,

$$av_x \colon \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad av_x(f) = f(x)\,.$$

Demostrade que é linear. ¿É continua?

Aplicacións lineares abertas

7.8 Sexan E e F espazos vectoriais normados. Toda aplicación linear aberta $f \colon E \to F$ é sobrexectiva.
(Indicación: a imaxe da bóla aberta unitaria $B_E(0,1)$ conterá unha bóla aberta de centro 0)

O recíproco verifícase para espazos vectoriais normados completos, cuestión que non imos considerar (Teorema de Banach-Schauder). Pero en xeral non é certo.

7.9 Exercicio Comprobade que a seguinte é unha aplicación linear, continua e bixectiva, pero que a súa inversa non é continua:

$$f \colon \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty\,,$$
$$f(\{x_n\}) = \{\frac{x_n}{n}\}\,.$$