

EXPOSICIÓN: **A topoloxía da converxencia uniforme** [Equipo 2] 6/7 de novembro de 2017

*Completamento dun espazo métrico*

Sexa  $(X, d)$  un espazo métrico. Denomínase *completamento* ou *compleción* de  $X$  a un par formado por un espazo métrico completo  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  e unha función isométrica  $\phi: X \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $\phi(X)$  sexa denso en  $\tilde{X}$ .

**8.1 Teorema** Todo espazo métrico  $(X, d)$  admite un completamento. Ademais, o completamento é único salvo isometrías.

Para demostralo, imos construír unha aplicación isométrica

$$\Phi: X \longrightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{R}).$$

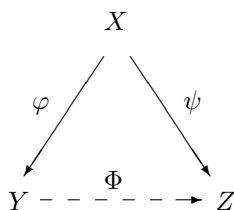
Como o espazo de Banach  $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$  é completo, a adherencia de  $\Phi(X)$  será un completamento de  $X$ . Para definir  $\Phi$ , fixamos un punto auxiliar  $x_0 \in X$ . Para cada punto  $x \in X$ , denotamos por  $\phi(x)$  a función de  $X$  en  $\mathbb{R}$  dada por

$$\phi(x)(y) = d(x, y) - d(x_0, y).$$

É doado comprobar que as funcións  $\phi(x)$  así definidas son limitadas, e que  $\Phi$  é unha función isométrica. O seguinte exercicio permite concluír que o completamento é único salvo isometrías.

**8.2 Exercicio** Sexan  $X, Y$  e  $Z$  espazos métricos. Sexan  $\varphi: X \rightarrow Y$  e  $\psi: X \rightarrow Z$  funcións isométricas.

1. Se  $Z$  é completo e  $\varphi(X)$  é denso en  $Y$ , existe unha función isométrica  $\Phi: Y \rightarrow Z$  que fai conmutativo o diagrama



2. Se, ademais,  $\psi(X)$  é denso en  $Z$ , a función  $\Phi$  é unha isometría.

*Espazos polacos*

Os espazos métricos completos e segundo enumerábeis verifican moitas propiedades interesantes. Para un espazo topolóxico metrizable, segundo enumerabilidade equivale a separabilidade. Cando a topoloxía se pode definir a partir dunha métrica completa, dise que o espazo é *completamente metrizable*. Os espazos topolóxicos completamente metrizaes e separábeis denomínanse *espazos polacos*. É inmediato que todo subespazo pechado dun espazo polaco tamén é polaco. O seguinte resultado precisa de máis argumentación.

**8.3 Teorema** *Todo subespazo aberto dun espazo polaco é polaco.*

Hai que comprobar que todo subespazo aberto dun espazo métrico completo  $(X, d_X)$  é homeomorfo a un espazo métrico completo. Sexa  $E$  un subespazo aberto dun espazo métrico  $X$ . Daquela,  $X - E$  é pechado. Consideremos a función continua  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) = \frac{1}{d(x, X - E)}.$$

Sexa  $F \subset E \times \mathbb{R} \subset X \times \mathbb{R}$  o grafo de  $f$ . O conxunto  $F$  pódese expresar como o subconxunto dos elementos  $(x, t)$  que verifican  $t \cdot d(x, X - E) = 1$ , polo que é un subespazo pechado dun espazo métrico completo.

**8.4 Exercicio** Aplicar o resultado anterior ao caso particular  $X = \mathbb{R}$ ,  $E = \mathbb{R} - \{0\}$ , procurando unha imaxe gráfica da solución.

*Topoloxía da converxencia uniforme no espazo de funcións continuas*

Sexan  $X$  e  $Y$  espazos métricos, supoñamos que a métrica  $d_Y$  é limitada No conxunto  $\text{Map}(X, Y)$  das aplicacións continuas de  $X$  en  $Y$  imos considerar a métrica do supremo asociada a  $d_Y$ ,

$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)),$$

para cada par de funcións  $f, g$  en  $\text{Map}(X, Y)$ . A topoloxía asociada denomínase *topoloxía da converxencia uniforme* en  $\text{Map}(X, Y)$ , asociada á métrica  $d_Y$  de  $Y$ . Sexa

$$\Pi = \text{Map}(X, Y) \times X,$$

o espazo topolóxico coa métrica produto. Verifícase a seguinte propiedade importante:

**8.5 Teorema** *A aplicación avaliación*

$$Av : \text{Map}(X, Y) \times X \longrightarrow Y,$$

dada por  $Av(f, x) = f(x)$  é continua.

**8.6 Exemplo** O anterior resultado aplícase, en particular, á seguinte aplicación

$$Av : \mathcal{C}(I) \times I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Av(f, x) = f(x),$$

considerando en  $I$  e en  $\mathbb{R}$  a métrica usual.

*Camiños e homotopía*

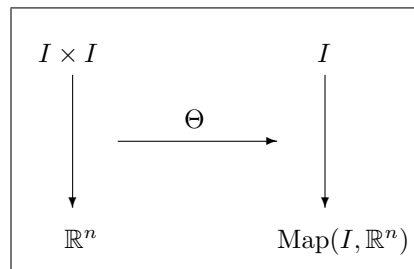
Sexa  $I = [0, 1]$ , o intervalo unidade coa topoloxía usual, consideremos en  $\mathbb{R}^n$  a métrica euclidiana. Como sabemos, un camiño en  $\mathbb{R}^n$  é unha aplicación continua  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Unha *homotopía de camiños* é unha función continua  $H : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se denotamos  $(s, t)$  aos elementos de  $I \times I$ , para cada  $t$  fixo unha homotopía define un camiño  $h_t : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , por  $h_t(s) = H(s, t)$ . Neste sentido, unha homotopía adoita pensarse coma unha colección de camiños en  $\mathbb{R}^n$  que «varían con continuidade» a respecto do parámetro  $t$  (un «*camión de camiños*»). Coa axuda da topoloxía da converxencia uniforme podemos precisar esta idea.

Consideremos os espazos  $\text{Map}(I \times I, \mathbb{R}^n)$  e  $\text{Map}(I, \text{Map}(I, \mathbb{R}^n))$ , coa topoloxía da converxencia uniforme. Definimos unha función

$$\Theta : \text{Map}(I \times I, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \text{Map}(I, \text{Map}(I, \mathbb{R}^n)),$$

por

$$\Theta(H)(t) = h_t : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ onde } h_t(s) = H(s, t).$$



**8.7 Teorema** *A aplicación  $\Theta$  é unha isometría.*

Hai que comprobar:

- que  $\Theta$  está ben definida. Ou sexa, que para  $H \in \text{Map}(I \times I, \mathbb{R}^n)$  a función  $\Theta(H)$  é continua;
- que  $\Theta$  é isométrica, o que se segue do principio dos supremos iterados;
- que a función  $\Theta$  é sobrexectiva; dada unha función continua  $\varphi: I \rightarrow \text{Map}(I, \mathbb{R}^n)$ , a composición

$$I \times I \xrightarrow{\varphi \times id_I} \text{Map}(I, \mathbb{R}^n) \times I \xrightarrow{Av} \mathbb{R}^n$$

é unha preimaxe.

(Poderíase traballar nun espazo métrico  $Y$  na vez de  $\mathbb{R}^n$ , pero teríamos que utilizar un resultado sobre compacidade e continuidade uniforme que só coñecemos no marco dos espazos euclidianos)

*Exercicio*

Dados dous espazos topolóxicos,  $X$  e  $Y$ ,  $Y$  metrizable, a topoloxía da converxencia uniforme en  $\text{Map}(X, Y)$  depende da métrica (por suposto, limitada) de  $Y$ , non somentes da súa topoloxía. Imos ver un exemplo onde dúas métricas de  $Y$ , topoloxicamente equivalentes, inducen topoloxías diferentes en  $\text{Map}(X, Y)$ .

Sexa  $X = \mathbb{N}$ ,  $Y = \mathbb{N} \times (\{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}\})$ . En  $Y$  imos considerar dúas métricas,  $d'$ ,  $d''$ . A primeira vai ser a métrica usual limitada de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$d'((n_1, z_1), (n_2, z_2)) = \frac{\sqrt{(n_1 - n_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}{1 + \sqrt{(n_1 - n_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}};$$

a segunda,

$$d''((n, z_1), (n, z_2)) = \min\{1, n|z_1 - z_2|\}, \quad e$$

$$d''((n_1, z_1), (n_2, z_2)) = 1, \quad \text{se } n_1 \neq n_2.$$

É doado comprobar que son métricas topoloxicamente equivalentes. Non inducen a mesma topoloxía en  $\text{Map}(X, Y)$ : a sucesión de funcións  $f_m: \mathbb{N} \rightarrow Y$ ,  $f_m(n) = (n, 1/m)$ , coa topoloxía inducida por  $d'$  converxe a  $f(n) = (n, 0)$ , e non é de Cauchy para a métrica asociada a  $d''$ .