Exposición: **A topoloxía da converxencia uniforme** [Equipo 2] 6/7 de novembro de 2017

Completamento dun espazo métrico

Sexa (X, d) un espazo métrico. Denomínase *completamento* ou *compleción* de X a un par formado por un espazo métrico completo $(\widetilde{X}, \tilde{d})$ e unha función isométrica $\phi\colon X \to \widetilde{X}$ tal que $\phi(X)$ sexa denso en $\widetilde{X}$.

8.1 Teorema Todo espazo métrico (X, d) admite un completamento. Ademais, o completamento é único salvo isometrías.

Para demostralo, imos construír unha aplicación isométrica

$$\Phi\colon\ X \longrightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) .$$

Como o espazo de Banach $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ é completo, a adherencia de $\Phi(X)$ será un completamento de X. Para definir Φ, fixamos un punto auxiliar $x_0 \in X$. Para cada punto $x \in X$, denotamos por $\phi(x)$ a función de X en $\mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x)(y) = d(x, y) - d(x_0, y) .$$

É doado comprobar que as funcións $\phi(x)$ así definidas son limitadas, e que Φ é unha función isométrica. O seguinte exercicio permite concluír que o completamento é único salvo isometrías.

8.2 Exercicio Sexan X, Y e Z espazos métricos. Sexan $\varphi\colon X \to Y$ e $\psi\colon X \to Z$ funcións isométricas.

1. Se Z é completo e $\varphi(X)$ é denso en Y, existe unha función isométrica $\Phi\colon Y \to Z$ que fai conmutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ Y \arrow[rr, dashed, "\Phi"] & & Z \end{tikzcd}$$

2. Se, ademais, $\psi(X)$ é denso en Z, a función Φ é unha isometría.

Espazos polacos

Os espazos métricos completos e segundo enumerábeis verifican moitas propiedades interesantes. Para un espazo topolóxico metrizábel, segundo enumerabilidade equivale a separabilidade. Cando a topoloxía se pode definir a partir dunha métrica completa, dise que o espazo é *completamente metrizábel*. Os espazos topolóxicos completamente metrizábeis e separábeis denomínanse *espazos polacos*. É inmediato que todo subespazo pechado dun espazo polaco tamén é polaco. O seguinte resultado precisa de máis argumentación.

8.3 Teorema *Todo subespazo aberto dun espazo polaco é polaco.*

Hai que comprobar que todo subespazo aberto dun espazo métrico completo (X, d_X) é homeomorfo a un espazo métrico completo. Sexa E un subespazo aberto dun espazo métrico X. Daquela, $X - E$ é pechado. Consideremos a función continua $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \frac{1}{d(x, X - E)} .$$

Sexa $F \subset E \times \mathbb{R} \subset X \times \mathbb{R}$ o grafo de f. O conxunto F pódese expresar como o subconxunto dos elementos (x, t) que verifican $t \cdot d(x, X - E) = 1$, polo que é un subespazo pechado dun espazo métrico completo.

8.4 Exercicio Aplicar o resultado anterior ao caso particular $X = \mathbb{R},\ E = \mathbb{R} - \{0\}$, procurando unha imaxe gráfica da solución.

Topoloxia da converxencia uniforme no espazo de funcións continuas

Sexan X e Y espazos métricos, supoñamos que a métrica d_Y é limitada No conxunto $\mathrm{Map}(X, Y)$ das aplicacións continuas de X en Y imos considerar a métrica do supremo asociada a d_Y,

$$\rho_\infty(f, g) \;=\; \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))\,,$$

para cada par de funcións f, g en $\mathrm{Map}(X, Y)$. A topoloxía asociada denomínase *topoloxía da converxencia uniforme* en $\mathrm{Map}(X, Y)$, asociada á métrica d_Y de Y. Sexa

$$\Pi = \mathrm{Map}(X, Y) \times X\,,$$

o espazo topolóxico coa métrica produto. Verifícase a seguinte propiedade importante:

8.5 Teorema *A aplicación avaliación*

$$Av:\ \mathrm{Map}(X, Y) \times X \;\longrightarrow\; Y\,,$$

dada por $Av(f, x) = f(x)$ é continua.

8.6 Exemplo O anterior resultado aplícase, en particular, á seguinte aplicación

$$Av\colon \mathcal{C}(I) \times I \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad Av(f, x) = f(x),$$

considerando en I e en $\mathbb{R}$ a métrica usual.

Camiños e homotopía

Sexa $I = [0, 1]$, o intervalo unidade coa topoloxía usual, consideremos en $\mathbb{R}^n$ a métrica euclidiana. Como sabemos, un camiño en $\mathbb{R}^n$ é unha aplicación continua $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^n$. Unha *homotopía de camiños* é unha función continua $H\colon I \times I \to \mathbb{R}^n$. Se denotamos (s, t) aos elementos de $I \times I$, para cada t fixo unha homotopía define un camiño $h_t\colon I \to \mathbb{R}^n$, por $h_t(s) = H(s, t)$. Neste sentido, unha homotopía adoita pensarse coma unha colección de camiños en $\mathbb{R}^n$ que «varían con continuidade» a respecto do parámetro t (un «*camiño de camiños*»). Coa axuda da topoloxía da converxencia uniforme podemos precisar esta idea.

Consideremos os espazos $\mathrm{Map}(I \times I, \mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{Map}(I, \mathrm{Map}(I, \mathbb{R}^n))$, coa topoloxía da converxencia uniforme. Definimos unha función

$$\Theta\colon\ \mathrm{Map}(I \times I, \mathbb{R}^n) \;\longrightarrow\; \mathrm{Map}(I, \mathrm{Map}(I, \mathbb{R}^n))\,,$$

por

$$\Theta(H)(t) \;=\; h_t\colon I \to \mathbb{R}^n\,,\ \text{onde } h_t(s) = H(s, t)\,.$$

$$\begin{tikzcd} I \times I \arrow[d] & & I \arrow[d] \\ \mathbb{R}^n \arrow[rr, phantom, "\xrightarrow{\ \Theta\ }"] & & \mathrm{Map}(I, \mathbb{R}^n) \end{tikzcd}$$

8.7 Teorema *A aplicación Θ é unha isometría.*

Hai que comprobar:

- que Θ está ben definida. Ou sexa, que para $H \in \mathrm{Map}(I\times I, \mathbb{R}^n)$ a función $\Theta(H)$ é continua;
- que Θ é isométrica, o que se segue do principio dos supremos iterados;
- que a función Θ é sobrexectiva; dada unha función continua $\varphi\colon I \to \mathrm{Map}(I, \mathbb{R}^n)$, a composición

$$I \times I \xrightarrow{\varphi \times id_I} \mathrm{Map}(I, \mathbb{R}^n) \times I \xrightarrow{Av} \mathbb{R}^n$$

  é unha preimaxe.

(Poderíase traballar nun espazo métrico Y na vez de $\mathbb{R}^n$, pero teriamos que utilizar un resultado sobre compacidade e continuidade uniforme que só coñecemos no marco dos espazos euclidianos)

Exercicio

Dados dous espazos topolóxicos, X e Y, Y metrizábel, a topoloxía da converxencia uniforme en $\mathrm{Map}(X, Y)$ depende da métrica (por suposto, limitada) de Y, non somentes da súa topoloxía. Imos ver un exemplo onde dúas métricas de Y, topoloxicamente equivalentes, inducen topoloxías diferentes en $\mathrm{Map}(X, Y)$.

Sexa $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{N} \times (\{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}\})$. En Y imos considerar dúas métricas, d', d''. A primeira vai ser a métrica usual limitada de $\mathbb{R}^2$,

$$d'((n_1, z_1), (n_2, z_2)) = \frac{\sqrt{(n_1 - n_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}{1 + \sqrt{(n_1 - n_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}\,;$$

a segunda,

$$d''((n, z_1), (n, z_2)) = \mathrm{mín}\{1, n|z_1 - z_2|\}\,, \quad \text{e}$$

$$d''((n_1, z_1), (n_2, z_2)) = 1\,, \qquad \text{se} \quad n_1 \neq n_2\,.$$

É doado comprobar que son métricas topoloxicamente equivalentes. Non inducen a mesma topoloxía en $\mathrm{Map}(X, Y)$: a sucesión de funcións $f_m\colon \mathbb{N} \to Y$, $f_m(n) = (n, 1/m)$, coa topoloxía inducida por d' converxe a $f(n) = (n, 0)$, e non é de Cauchy para a métrica asociada a d''.