EXPOSICIÓN: **Produtos arbitrarios** [Equipo 3] 20/21 de novembro de 2017

O cubo de Hilbert

Definimos o *Cubo de Hilbert*, **C**, como o subespazo de ℓ^2 das sucesións $\{x_n\}$ con $x_n \in [0, 1/n]$. Como conxunto é, pois, o produto cartesiano $\Pi_{n\in\mathbb{N}}[0, 1/n]$. Como se trata de sucesións limitadas, podemos consideralo tamén coma subconxunto de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$; e comparar a súa topoloxía coas topoloxías produto, suposto cada intervalo coa topoloxía usual, e a inducida pola métrica da converxencia uniforme. Trátase de comprobar que as tres coinciden.

10.1 A inclusión e ℓ^2 en $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ restrinxida ao Cubo de Hilbert é un mergullo Certamente a inclusión é continua, mesmo lipschitziana. De utilizar propiedades de compacidade, xa que **C** é compacto, o resultado sería inmediato, a restrición sería unha aplicación pechada. Como non estudamos compacidade neste marco, temos que facer un argumento máis laborioso.

As proxeccións coordenadas $pr_k\colon \ell^2 \to \mathbb{R}$ e $pr_k\colon \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ que a cada $\mathbf{x}$ fan corresponder x_k son continuas en ambos casos, pois non aumentan as distancias. Polo tanto, as imaxes recíprocas por estas proxeccións dun intervalo aberto de $\mathbb{R}$ son conxuntos abertos para as dúas topoloxías. En consecuencia, as súas interseccións finitas tamén son conxuntos abertos. Esta familia de conxuntos é base da topoloxía produto en $\Pi_{n\in\mathbb{N}}[0, 1/n]$. Imos comprobar que tamén é base para a topoloxía inducida no conxunto **C** para as dúas métricas.

Sexa $B_\infty(\mathbf{x}, r)$ unha bóla para a metrica da converxencia uniforme. Se $n \in \mathbb{N}$ é tal que $1/n < r$, entón $|x_n - y_n| < r$ para todo punto y de **C**. Para $1/i \geq r$, digamos $1 \leq i \leq k$, tomamos o aberto básico

$$B = \bigcap_{i=1}^{k} pr_i^{-1}(x_i - 1/i, x_i + 1/i)\,.$$

Resulta $\mathbf{x} \in B \subset B_\infty(\mathbf{x}, r)$.

Fagamos o mesmo para a métrica ℓ^2. Sexa $B_2(\mathbf{x}, r)$ unha bóla aberta. Sexa n tal que $\sum_{i=n}^{\infty} 1/i^2 < r^2/4$. Para cada enteiro i comprendido entre 1 e $n-1$, escollamos un número real maior que 0, ϵ_i, tal que $\sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i^2 < r^2/4$. O seguinte aberto satisfai a condición:

$$B = \bigcap_{i=1}^{n-1} pr_i^{-1}(x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i)\,.$$

Concluímos que as tres topoloxías coinciden.

10.2 Exercicio Definida en todo ℓ^2 a inclusión non é un mergullo

10.3 Exercicio Demostrade que o Cubo de Hilbert é homeomorfo á potencia topolóxica $I^{\mathbb{N}}$, de novo supoñendo en I a topoloxía usual.

A topoloxía das caixas

Nun produto de espazos topolóxicos pódese definir outra topoloxía dando a seguinte base: un aberto básico será un produto arbitrario de abertos de cada factor. É a denominada *topoloxía das caixas*. As proxeccións coordenadas aínda son continuas e abertas. No caso dun número finito de factores, topoloxía das caixas e topoloxía produto, obviamente, coinciden.

10.4 Exercicio Estudade a continuidade da aplicación diagonal

$$D\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,,\ D(x) = \phi_x\,,\ \phi_x(n) = x \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\,,$$

onde en $\mathbb{R}$ se considera a topoloxía usual e en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a topoloxía das caixas.

10.5 Exercicio Demostrade que coa topoloxía das caixas o espazo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ non é primeiro enumerábel; e, pois, non é metrizábel.
Indicación: pódese usar un «argumento diagonal»; supoñamos que $\beta = \{B_n, n \in \mathbb{N}\}$ é base local enumerábel do punto $\mathbf{x} = \{x_n\}$. Suposto cada B_n aberto, para cada proxección p_k, o conxunto $p_k(B_n)$ é aberto. Tomamos para cada $k \in \mathbb{N}$ un conxunto aberto U_k en $\mathbb{R}$, contendo o punto x_k e estrictamente contido en $p_k(B_k)$. O produto $\Pi_{k\geq 1} U_k$ é unha veciñanza de $\mathbf{x}$ que non contén ningunha veciñanza básica B_n.

O espazo métrico $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Utilizando a topoloxía usual en $\mathbb{R}$, o produto topolóxico $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é metrizábel: partindo da métrica $d_0(x, y) = \text{mín}\{|x - y|, 1\}$ en $\mathbb{R}$, se $\mathbf{x} = \{x_n\}$ e $\mathbf{y} = \{y_n\}$ son dous elementos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, unha métrica inducindo a topoloxía produto pódese definir por

$$d^{\mathbb{N}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{d_0(x_n, y_n)}{n} \right\} .$$

É un espazo vectorial métrico e completo, pero non é normado: $d^{\mathbb{N}}(a \cdot \mathbf{x}, \mathbf{0}) \neq |a| \cdot d^{\mathbb{N}}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$.

10.6 Exercicio Como conxuntos, $I^{\mathbb{N}}$ e $\mathcal{B}(\mathbb{N}, I)$ coinciden, son o conxunto de sucesións no intervalo unidade. Sexan τ_c a topoloxía das caixas en $I^{\mathbb{N}}$ e τ_π a topoloxía produto. Comprobade que as funcións identidade

$$(I^{\mathbb{N}}, \tau_c) \xrightarrow{id} (\mathcal{B}(\mathbb{N}, I), \rho_\infty) \xrightarrow{id} (I^{\mathbb{N}}, \tau_\pi)$$

son continuas, pero ningunha das dúas é homeomorfismo.

Métrica de Baire

Imos definir unha métrica nunha potencia enumerábel, $X^{\mathbb{N}}$. Se φ e ψ son elementos de $X^{\mathbb{N}}$, definimos:

$$\begin{cases} d(\varphi, \psi) = 0 & \text{se } \varphi = \psi \\ \\ d(\varphi, \psi) = \dfrac{1}{n_0} & \text{se } n_0 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \neq \psi(n)\} \end{cases}$$

É a denominada *métrica de Baire*. Sexa τ_d a topoloxía asociada.

10.7 Exercicio Consideramos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ coa topoloxía usual. Demostrade que en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, τ_d é a topoloxía produto. E que en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, τ_d é estritamente máis fina que a topoloxía produto.

Indicación

1) $d(\varphi, \psi) < 1/k \Leftrightarrow \varphi(i) = \psi(i)$ para $i \leq k$.

2) $B(\varphi, 1/k) = \{\psi \in X^{\mathbb{N}} \mid \psi(i) = \varphi(i) \text{ para } i \leq k\} = \cap_{i=1}^{k} pr_i^{-1}(\varphi(i))$.

3) Un aberto básico da topoloxía produto en $X^{\mathbb{N}}$ é da forma $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k \times X \times X \cdots = \cap_{i=1}^{k} pr_i^{-1}(U_i)$, para algún k, onde os U_i son conxuntos abertos de X.

4) Para $X = \mathbb{N}$, as bólas abertas coinciden cós abertos $\{x_1\} \times \{x_2\} \times \cdots \{x_k\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots$, que son unha base da topoloxía produto.

5) Para $X = \mathbb{R}$, todo aberto básico da topoloxía produto segue a ser aberto na topoloxía métrica, pero as bólas $B(\varphi, 1/k)$ non conteñen ningún aberto básico da topoloxía produto.