# Espazos cociente

27/28 de novembro de 2017

**11.1** Probade que $\mathbb{S}^1$ é homeomorfo ao colapso de $\{0,1\}$ a un punto en $I$.

**11.2** Considerade o espazo cociente de $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$ pola relación de equivalencia dada por $(x,y) \sim (x',y')$ se $x^2+y^2 = x'^2+y'^2$. Probade que $\mathbb{R}^2/\!\sim$ é homeomorfo a $[\,0,+\infty\,)$ coa topoloxía usual.

**11.3 (E 2 [III v])** Dado un espazo topolóxico $X$, defínese o *cono* de $X$ como o espazo cociente

$$C(X) = (X \times I)/(X \times \{1\})\,.$$

Probade que $C(\mathbb{S}^1)$ é homeomorfo ao disco pechado unitario $\mathbb{D} = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\,\}$.

**11.4 (E 4 [II v])** Defínese a *Faixa de Möbius*, $\mathcal{M}$, como cociente do cadrado unitario $I^2$ pola relación de equivalencia xerada por $(0,t) \sim (1,1-t)$. Construíde unha función sobrexectiva de $\mathcal{M}$ en $\mathbb{S}^1$.

**11.5** Sexa $X = D^2 \times \{-1,1\}$, subespazo de $\mathbb{R}^3$ coa topoloxía usual, onde $D^2$ denota o disco unitario pechado en $\mathbb{R}^2$. Considera a relación de equivalencia en $X$ xerada por:

$$((x,y),-1) \;\sim\; ((x,y),1) \text{ se } \|(x,y)\|_2 \;=\; 1\,.$$

Demostrade que o cociente $X/\!\sim$ é homeomorfo á esfera $\mathbb{S}^2$ coa topoloxía usual.

**11.6 (E 1 [I v])** Considerade a aplicación

$$h\colon\, \mathbb{R}^2 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^1\,,\; h(x) \;=\; \frac{x}{\|x\|}\,,$$

coa toploxía e norma euclidianas. Discutide as seguintes afirmacións: *a*) $h$ é continua; *b*) $h$ é aberta; *c*) $h$ é pechada; *d*) $h$ é unha identificación.

**11.7 (E 3 [I v])** Sexa $D^2$ o disco unitario pechado, subespazo de $\mathbb{R}^2$ coa topoloxía usual. Sexa $a\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ a aplicación antipodal, $a(x) = -x$. Considerade en $D^2$ a relación de equivalencia xerada por $x \sim a(x)$, para $x \in \mathbb{S}^1$.

1. Demostrade que o cociente $D^2/\!\sim$ é homeomorfo ao plano proxectivo $\mathbb{RP}^2$.
2. Discutide se a relación de equivalencia dada se pode definir pola acción dun grupo

**11.8 (E 5 [II e IV v])** Sexa $X = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ coa topoloxía usual. Considerade en $X$ a relación de equivalencia xerada por $(x,n) \sim (x',n')$ se $x = x' < 0$. Sexa $p\colon X \to X/\!\sim$ a proxección cociente.

1. Discutide se $p$ é aberta ou pechada.
2. Calculade a fronteira de $p((-\infty,0) \times \{1\})$.

**11.9** Sexa $X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \}$, coa topoloxía usual, e $A = \{ (x, y) \in X \mid y > 0 \}$. Considerade o espazo cociente $Y = X/A$ e representade por $[x, y]$ a clase de $(x, y)$.

a) Estudade se $Y$ é Hausdorff.

b) Estudade se é continua a aplicación $f \colon Y \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ ten a topoloxía usual, dada por:

$$f([x, y]) = \begin{cases} x & \text{se} \quad y = 0, \\ \\ 0 & \text{se} \quad y > 0. \end{cases}$$