Espazos suma e produto

13/14 de novembro de 2017

9.1 Probade que a suma topolóxica de dous espazos discretos é un espazo discreto. Probade que a suma topolóxica de dous espazos triviais non é sempre un espazo trivial.

9.2 Sexan X e Y dous espazos topolóxicos disxuntos e $f\colon X \to Y$ unha aplicación. Definimos unha aplicación $F\colon X \coprod Y \to Y$ por

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in X \\ \\ z & \text{se } z \in Y \,. \end{cases}$$

Probade que f é continua sse F é continua.

9.3 Sexa S_r o subespazo de $\mathbb{R}^2$, coa topoloxía usual, definido por

$$S_r = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2 \,\}.$$

Considerade a suma topolóxica $X = \sum_{r\in[0,+\infty)} S_r$ e estudade se X satisfai algún axioma de numerabilidade e se é separábel.

9.4 Consideremos a seguinte familia de subespazos de $\mathbb{R}^2$ coa topoloxía usual:

$$E_n \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n^2\}\,,\; n \in \mathbb{N}\,.$$

Sexa $X = \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n$ a suma topolóxica desta familia. Discutide se X verifica algún axioma de numerabilidade.

9.5 (E 1) Sexa $E_n = [n, n + 1)$, subespazo de $\mathbb{R}$ coa topoloxía usual, $n \in \mathbb{Z}$. Sexa

$$\mathbb{R} \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} E_n$$

o espazo suma topolóxica.

1. Achade unha base da súa topoloxía
2. Definide unha métrica que determine esta topoloxía

9.6 Sexan $(M_\lambda, d_\lambda), \lambda \in \Lambda$, espazos metrizábeis. Considerade o espazo suma topolóxica disxunta M desta familia. Construíde unha métrica que defina a topoloxía de M.

9.7 Sexa $\mathcal{S} = \{(0, 1)\}$ o espazo de Sierpinski, con $\{0\}$ o único conxunto aberto propio. Describide a topoloxía de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$

9.8 Sexan (X, d_X) e (Y, d_Y) espazos métricos. Comprobade que a métrica produto en $X \times Y$ induce a topoloxía produto.

9.9 (E 2) Considerade o producto $(\mathbb{R}, \tau_S) \times (\mathbb{R}, \tau_S)$ da recta de Sorgenfrey por si propia. Describide a topoloxía inducida pola topoloxía producto en cada recta pola orixe.

9.10 (E 5) Sexan X e Y espazos topolóxicos, $A \subset X$ e $B \subset Y$. Demostrade:

1. $(A \times B)' = [\mathrm{Cl}(A) \times B'] \cup [A' \times \mathrm{Cl}(B)]$.
2. $\mathrm{Fr}(A \times B) = [\mathrm{Cl}(A) \times \mathrm{Fr}(B)] \cup [\mathrm{Fr}(A) \times \mathrm{Cl}(B)]$.

9.11 (E 3) A diagonal Δ de $X^2 = X \times X$ defínese coma o subconxunto $\{(x,x) \mid x \in X\}$. Probade que un espazo topolóxico X é Hausdorff sse a diagonal de X^2, coa topoloxía produto, é un subconxunto pechado.

9.12 Demostrade que se $f\colon X \to Y$ é continua e Y é Hausdorff, entón o conxunto

$$\{\, (x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$$

é pechado en $X \times X$.

9.13 Sexan X, Y espazos topolóxicos, sendo Y Hausdorff, $f, g : X \to Y$ dúas aplicacións continuas.

1. Demostrade que o conxunto
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
é pechado.
2. Demostrade que se $D \subset X$ é denso e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$, daquela $f = g$.

9.14 Demostrade que se $f\colon X \to Y$ é unha aplicación aberta e sobrexectiva e o conxunto

$$\{\, (x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$$

é pechado en $X \times X$, daquela Y é Hausdorff.