Martes, 7 de novembro de 2017

RESPOSTAS

Exercicio 1. O conxunto

$$(-\infty,0)\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\frac{1}{2n+2},\frac{1}{2n+1})\right)\cup(1/2,+\infty)$$

é aberto e non corta a E; polo tanto, ningún dos seus puntos é de acumulación. Os puntos do conxunto

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right)$$

son todos de acumulación: se y é un punto deste conxunto, toda veciñanza básica, $[y,z)$, contén infinitos puntos de E.

Resta por considerar os puntos da forma $1/n, n\in\mathbb{N}, n>1$, e o 0. Calquera aberto básico $[0,z)$ ou $[\frac{1}{2n+1},z)$ corta a E en infinitos puntos; por contra, un conxunto da forma $[\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1})$ so corta a E no punto $1/2n$. Finalmente,

$$E' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right)\cup\{0\}\,.$$

Exercicio 2. A función restrinxida a cada un dos conxuntos $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ e $(1,+\infty)$ é continua, por ser constante; ao ser conxuntos abertos, a propia función é continua nos seus puntos. Só resta estudar a continuidade nos puntos -1 e 1.

Para estudar a continuidade no punto -1, tomamos unha veciñanza da súa imaxe, que é 2; por exemplo, a veciñanza $(1,+\infty)$. A súa imaxe recíproca é $(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$, que non é unha veciñanza de -1 na topoloxía usual. Logo, a función non é continua no punto -1.

Para estudar a continuidade no punto 1, consideramos unha base local da súa imaxe, que é 1; por exemplo, a colección $\{(1-1/n,+\infty), n\in\mathbb{N}\}$. A imaxe recíproca de calquera destas veciñanzas é $\mathbb{R}$, que é unha veciñanza do 1; logo a función é continua no 1.