EXPOSICIÓN: **Acción de grupos e espazos homoxéneos**

[Equipo 4] 4/5 de decembro de 2017

Topoloxía dos grupos topolóxicos

Un *grupo topolóxico* é un grupo G que ten tamén unha topoloxía, e tal que as operacións do grupo, produto e inverso, son continuas:

$$\begin{array}{ll} \Pi\colon G\times G \longrightarrow G\,; & \iota\colon G \longrightarrow G\,. \\ (g_1,g_2) \rightsquigarrow g_1\cdot g_2\,; & g \rightsquigarrow g^{-1} \end{array}$$

Se G non é un espazo topolóxico, sempre se pode considerar coma grupo topolóxico dotándoo da topoloxía discreta.

12.1 Exercicio Sexa H un subgrupo do grupo topolóxico G. Demostrade que a súa adherencia, $\overline{H}$, é tamén un grupo.

12.2 Se A e B son subconxuntos de G, usaremos a notación $AB = \Pi(A\times B)$ e $A^{-1} = \iota(A)$ para denotar o conxunto de todos os produtos de elementos de A por elementos de B, nun caso, o conxunto de inversos de A, no outro.

1. Cada elemento g do grupo define tres homeomorfismos do grupo en si mesmo:

$$L_g(x) = gx\,;\quad R_g(x) = xg\,;\quad I_g(x) = gxg^{-1}\,.$$

2. Sexa V unha veciñanza do elemento neutro e. Existe unha veciñanza U de e contida en V e tal que $U\cdot U^{-1}\subset V$.

3. Sexa V unha veciñanza do elemento neutro e. Existe unha veciñanza U de e contida en V e tal que $U = U^{-1}$.

4. As veciñanzas U de e verificando $U = U^{-1}$ forman unha base local.

12.3 Exercicio Sexa H un subgrupo normal (ou distinguido, en sentido alxébrico) do grupo topolóxico G. Demostrade que a súa adherencia, $\overline{H}$, é tamén un subgrupo normal.

12.4 Exercicio Sexa G un grupo topolóxico, e o elemento neutro. Probade que G é Hausdorff sse o conxunto $\{e\}$ é pechado.

Exemplos

1. $(\mathbb{R}^n,+)$, $(\mathbb{C}^n,+)$, $(\mathbb{R}-\{0\},\times)$, $(\mathbb{C}-\{0\},\times)$. Estes dous últimos grupos adóitanse denotar $\mathbb{R}^*$ e $\mathbb{C}^*$, respectivamente.

2. O grupo $\mathbb{Z}_2 = \{-1,1\}$ podemos identificalo con $\mathbb{S}^0$, que ten a topoloxía discreta.

3. O grupo $\mathbb{S}^1$ pódese presentar como subgrupo e subespazo de $\mathbb{C}-\{0\}$.

4. Analogamente defínese unha estrutura de grupo en $\mathbb{S}^3$, como subgrupo do grupo multiplicativo $\mathbb{H}-\{0\}$ dos cuaternios. Como espazo vectorial, $\mathbb{H}$ é $\mathbb{R}^4$, coa métrica euclidiana. Para definir a estrutura multiplicativa pártese da base canónica, que se denota por $\{1,i,j,k\}$; o 1 actua como elemento neutro, para os outros establécese:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1\,;\; ij = k = -ji\,,\; jk = i = -kj\,,\; e\; ki = j = -ik\,,$$

e se estende a todos os elementos de $\mathbb{H}$ por linearidade. Sexa $q = a + bi + cj + dk$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. A norma $\|q\|$ é a raiz cadrada de $q\overline{q}$, onde $\overline{q}$ denota o conxugado de q, $\overline{q} = a - bi - cj - dk$. Para comprobar que a norma dun produto é o produto das normas, cálculase primeiro $\overline{p \cdot q} = \overline{q} \cdot \overline{p}$. Séguese que $\mathbb{S}^3$, o conxunto dos cuaternios de norma unidade, é un subgrupo de $\mathbb{H} - \{0\}$.

As únicas esferas que admiten unha estrutura de grupo topolóxico son $\mathbb{S}^0$, $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^3$.

5. O *grupo linear xeral*, $GL(n, \mathbb{R})$, matrices $n \times n$ inversibles, e os seus subgrupos, son grupos topolóxicos. Dótase dunha topoloxía ao conxunto $M_n(\mathbb{R})$ de todas as matrices $n \times n$ identificándoo con $\mathbb{R}^{n^2}$, facendo corresponder a cada matriz o elemento de $\mathbb{R}^{n^2}$ que ten como coordenadas as entradas da matriz, lidas fila a fila.

   O grupo ortogonal, $\mathbb{O}(3)$, é un subgrupo de $GL(3, \mathbb{R})$. Unha matriz é ortogonal se a súa inversa coincide coa súa transposta. Disto dedúcese que o conxunto de puntos correspondentes de $\mathbb{R}^9$ é pechado e limitado. Ou sexa, que $\mathbb{O}(3)$ é un subespazo compacto de $GL(3, \mathbb{R})$. Ten dúas compoñentes conexas. Unha delas é o grupo das rotacións de $\mathbb{R}^3$, $S\mathbb{O}(3)$, matrices ortogonais con determinante 1.

Accións continuas

Sexa G un grupo topolóxico e X un espazo topolóxico. Se $\Phi\colon G \times X \to X$ é continua, dise que a acción é continua, ou que G opera en X por homeomorfismos, pois neste caso cada φ_g é un homeomorfismo. A aplicación cociente $X \to X/G$ é aberta.

Exemplos

1. O grupo multiplicativo $\mathbb{R} - \{0\}$ opera sobre $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ polo produto dun escalar por un vector. O cociente da acción é, por definición, o espazo proxectivo real $\mathbb{RP}^n$.

2. Para definir unha acción de $\mathbb{Z}_2$ nun espazo X chega con coñecer $\phi_{-1}\colon X \to X$, que pode ser calquera *involución* de X, ou sexa, unha aplicación tal que feita dúas veces dea a identidade.

   É o caso da aplicación antipodal $a\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $a(x) = -x$. O cociente por esta acción, $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$, é o espazo proxectivo real $\mathbb{RP}^n$.

3. Analogamente, o grupo multiplicativo $\mathbb{C} - \{0\}$ opera sobre $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ polo produto escalar. O cociente da acción é o espazo proxectivo complexo $\mathbb{CP}^n$.

   A acción de $\mathbb{C} - \{0\}$ sobre $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ define unha acción de $\mathbb{S}^1$ sobre $\mathbb{S}^{2n+1}$. O cociente, $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$, segue a ser o espazo proxectivo $\mathbb{CP}^n$. Pódese demostrar que $\mathbb{CP}^1$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^2$

   Indicación: Considerade a función de $\mathbb{S}^3$ sobre $\mathbb{S}^2$ dada por

   $$f(z_1, z_2) = (z_1\overline{z}_1 - z_2\overline{z}_2, 2Im(z_1\overline{z}_2), -2Re(z_1\overline{z}_2))$$

   Comparade co exemplo 12.6 abaixo.

12.5 O Toro e a Garrafa de Klein Neste apartado proponse un caso particular da seguinte situación abstracta: tense un espazo topolóxico X, un grupo topolóxico G que opera sobre X, e un subgrupo normal H de G. Trátase de comparar os cocientes X/G e X/H.

O noso espazo X vai ser o plano euclidiano, $\mathbb{R}^2$. O grupo G será o subgrupo de isometrías do plano xerado polas transformacións $\varphi(x, y) = (x, y + 1)$, $\psi(x, y) = (x + 1, -y)$. Coma grupo abstracto pódese expresar por $G = \{\varphi, \psi \mid \psi^{-1}\varphi\psi\varphi\}$, presentación con dous xeradores e unha relación. Só imos utilizar o feito de que opera por homeomorfismos, non precisamos explicitar unha topoloxía nel. O cociente da acción de G sobre $\mathbb{R}^2$ é a denominada *Garrafa de Klein*, $\mathcal{K}$.

Da relación $\psi^{-1}\varphi\psi\varphi = e$ dedúcese $\varphi\psi\varphi = \psi$ e $\psi^2\varphi = \varphi\psi^2$, polo que φ e ψ^2 xeran un subgrupo abeliano libre de G, ou sexa, $\mathbb{Z}^2$, que será o noso subgrupo H. Se denotamos $\psi^2 = \xi$, a operación inducida de $\mathbb{Z}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$ será $\varphi(x, y) = (x, y + 1)$ e $\xi(x, y) = (x + 2, y)$. O cociente é homeomorfo ao Toro, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Dado que se trata das accións dun grupo e un subgrupo, resulta obvio que os grafos das relacións de equivalencia das súas accións sobre $\mathbb{R}^2$ verifican a inclusión $\mathcal{R}_{Z^2} \subset \mathcal{R}_G$, e, pois, a identidade de $\mathbb{R}^2$ pasa ao cociente:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "id"] \arrow[d, "p_1"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "p_2"] \\
\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p"] & \mathbb{R}^2/G
\end{tikzcd}$$

Como p_1 e p_2 son abertas, a aplicación $p\colon T^2 \to \mathcal{K}$ é aberta e, pois, unha identificación; corresponde a acción de $\mathbb{Z}_2 \cong G/\mathbb{Z}^2$: a aplicación asociada á acción de -1 corresponde a ψ, que pasa ao cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. A aplicación p é o *revestimento de orientación* da Garrafa de Klein.

Espazos homoxéneos

Se H é un subgrupo de G, podemos considerar a acción de H sobre G dada pola multiplicación pola esquerda. Neste caso o cociente denótase $H\backslash G$. Se a acción é pola dereita, G/H. Estes espazos topolóxicos, cocientes dun grupo pola acción dun subgrupo, denomínanse *espazos homoxéneos*.

12.6 Exemplos

1. O subgrupo $\mathbb{Z}$ opera sobre o grupo aditivo $\mathbb{R}$. O cociente é homeomorfo e isomorfo ao grupo topolóxico $\mathbb{S}^1$.

2. Podemos considerar $S\mathbb{O}(2) \subset S\mathbb{O}(3)$ identificando $S\mathbb{O}(2)$ co subgrupo das rotacións de $\mathbb{R}^3$ que deixan fixo o eixo z. O cociente é homeomorfo a $\mathbb{S}^2$.

   Indicación: Se $\mathbf{z} = (0, 0, 1)$ é o polo norte, traballade coa aplicación ϕ de $S\mathbb{O}(3)$ en $\mathbb{S}^2$ dada por $\phi(g) = g^{-1} \cdot \mathbf{z}$.

12.7 Exercicio Sexa H un subgrupo normal do grupo topolóxico G. Demostrade que o cociente G/H é un grupo topolóxico.