DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Universidade de Santiago de Compostela

Prof. Xosé M. Masa Vázquez

Topoloxía Xeral
8 de xaneiro de 2018

Primeira parte

1. Interior, adherencia, fronteira

a) Definición de punto interior, punto adherente e punto fronteiro.
b) Propiedades do interior, a adherencia e a fronteira dun conxunto.
c) Sexa X un espazo topolóxico, $E \subset X$. Proba a igualdade

$$\mathrm{Int}(E) = \{x \in E \mid E \in \mathcal{V}_x\}.$$

(1,75 puntos)

---

2. O cubo de Hilbert

a) Define o Cubo de Hilbert, $\mathbf{C}$. Demostra que as proxeczóns, pr_n, son funcións continuas.
b) Sexa X un espazo topolóxico. Proba que unha aplicación $f\colon X \to \mathbf{C}$ é continua sse a composición $pr_n \circ f$ con cada proxección é continua.

(1,5 puntos)

---

3. Sexan $X_n = [n, n+1), n \in \mathbb{Z}$, subespazos de $\mathbb{R}$ coa topoloxía usual, $X = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n$, a suma topolóxica dos espazos X_n. Sexa Z o produto topolóxico de $\mathbb{Z}$ con $[0,1)$, ambos coa topoloxía usual.

a) Acha unha métrica que defina a topoloxía de Z.
b) Constrúe un homeomorfismo

$$h\colon Z \longrightarrow X.$$

c) Partindo dos apartados anteriores conclúe que X é metrizábel e define unha métrica que determine a súa topoloxía.

(1,75 puntos)

Segunda parte

4. Identificación

a) Definición, exemplos, propiedades.
b) Que relación existe entre identificación e aplicación cociente?

(1,75 puntos)

---

5. Sexa $(\mathbb{R}, \tau)$ o espazo topolóxico con base a colección $\beta = \{[p, x], p < x, p \in \mathbb{Q}, x \notin \mathbb{Q}\}$.

a) Compara τ coa topoloxía usual e coa topoloxía de Sorgenfry.
b) Discute se $(\mathbb{R}, \tau)$ é metrizábel.

(1,75 puntos)

---

6. No subespazo $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ do espazo euclidiano $\mathbb{R}^3$ considera a relación de equivalencia xerada por $(u, -1) \sim (v, -1)$ e $(u, 1) \sim (v, 1)$. Demostra que o cociente é homeomorfo á esfera $\mathbb{S}^2$.

(1,5 puntos)

A puntuación é indicativa, a cualificación do exame é global.