Luns, 8 de xaneiro de 2018

RESPOSTAS

Cuestión 1.c).
"$\subset$"
Sexa $x \in \mathrm{Int}(E)$; como $\mathrm{Int}(E)$ é aberto e $\mathrm{Int}(E) \subset E$, verifícase $E \in \mathcal{V}_x$.
"$\supset$"
Se $E \in \mathcal{V}_x$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset E$. Logo $U \subset \mathrm{Int}(E)$ e $x \in \mathrm{Int}(E)$.

Exercicio 3.
a) Sendo $\mathbb{Z}$ un espazo discreto, a súa topoloxía vén dada pola métrica discreta, $\delta(n,m) = 1$ se $n \neq m$. En $[0,1)$ a topoloxía vén dada pola métrica usual. Polo tanto, a métrica produto,

$$d((m,s),(n,t)) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad m \neq n \\ |s-t| & \text{se} \quad m = n, \end{cases}$$

determina a topoloxía produto

b) Sexa $h(m,s) = m + s$. Z é unión disxunta dos subconxuntos abertos $\{m\} \times [0,1)$, X é a unión disxunta dos abertos $[m, m+1)$, e h induce homeomorfismos entre estes conxuntos.

c) Ser metrizábel é unha propiedade topolóxica, polo que X é metrizábel. O homeomorfismo h permite traducir a métrica do apartado a) a unha métrica en X:

$$d_X(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad [x] \neq [y] \\ |x-y| & \text{se} \quad [x] = [y], \end{cases}$$

onde $[x]$ denota a parte enteira de x.

Exercicio 5.
a) Nesta topoloxía todo conxunto (a,b) é aberto: dado $t \in (a,b)$, existen números p, x verificando $a < p < t < x < b$ e con $p \in \mathbb{Q}$ e $x \notin \mathbb{Q}$. En consecuencia, esta topoloxía é máis fina ca usual.

Este argumento adáptase a $[p,b)$, con $p \in \mathbb{Q}$, e a $(a,x]$, con $x \notin \mathbb{Q}$. Así, estes conxuntos tamén son abertos.

Por contra, non son abertos os conxuntos $[x,c)$, con $x \notin \mathbb{Q}$, nin $(c,p]$, con $p \in Q$, pois nin x nin p son puntos interiores. En consecuencia, τ non é comparábel coa topoloxía de Sorgenfrey.

b) O conxunto $\mathbb{Q}$ é denso en $(\mathbb{R}, \tau)$; se este espazo fora metrizábel, sería segundo enumerábel. Un argumento semellante ao usado para a topoloxía de Sorgenfrey permite concluír que τ non admite unha base enumerábel.

Exercicio 6.
É o exemplo *10.35* da referencia [10] na bibliografía do curso.