DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Universidade de Santiago de Compostela

Prof. Xosé M. Masa Vázquez

Topoloxía Xeral
28 de xuño de 2018

1. a) Continuidade secuencial.
b) Continuidade en espazos métricos.

(2 puntos)

---

2. A colección
$$\beta = \{[x,y),\, x \notin \mathbb{Q}, y > x\}\,.$$
é base para unha topoloxía τ en $\mathbb{R}$.

a) Estuda que intervalos son conxuntos abertos en $(\mathbb{R},\tau)$ e cales pechados.
b) Compara a topoloxía τ coa usual e coa de Sorgenfrey.
c) Compara as topoloxías inducidas no subconxunto $\mathbb{Q}$ polas tres citadas no apartado anterior.
d) Discute se $(\mathbb{R},\tau)$ é metrizábel.
e) Estuda a continuidade da función $f\colon(\mathbb{R},\tau_u)\to(\mathbb{R},\tau)$ dada por $f(x)=2x-1$.

(2 puntos)

---

3. Sexa $(V,\|\ \|)$ un espazo vectorial normado non trivial ($V\neq 0$). Demostra que o diámetro de calquera bóla aberta é igual ao dobre do raio.

(1 punto)

---

4. Sexan (X,τ_X) e (Y,τ_Y) dous espazos topolóxicos, $X\times Y$ o seu produto topolóxico.

a) Proba que as proxeccións son aplicacións continuas e abertas. Son necesariamente pechadas?
b) Demostra que a topoloxía produto é a menos fina que fai ás dúas proxeccións continuas.

(1,5 puntos)

---

5. Sexa $X=\mathbb{R}\times\{-1,1\}$, subespazo de $\mathbb{R}^2$ coa topoloxía usual. Considera nel a relación de equivalencia xerada por $(x,s)\sim(y,t)$ se $x=y<0$. Sexa Z o espazo cociente, $p\colon X\to Z$ a proxección.

a) Estuda se p é aberta ou pechada.
b) Satisfai Z algún axioma de numerabiliadade?
c) É Z metrizábel?
d) Denotemos por $[x,s]$ a clase de equivalencia de (x,s). Estuda a continuidade da función $f\colon Z\to\mathbb{R}$, dada por
$$f([x,s]) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{se} \quad x<0\,,\\ 2x+s & \text{se} \quad x\geq 0\,,\end{cases}$$
onde en $\mathbb{R}$ se considera a topoloxía usual.

(2 puntos)

---

6. Demostra que no Teorema de Tietze o rango pode ser substituído polo intervalo aberto $(-1,1)$, ou por $[-1,1)$, ou unha semirecta calquera, ou $\mathbb{R}$.

(1,5 puntos)
