RESPOSTAS

Exercicio 2.

a) e *b*) Intervalos abertos coa topoloxía τ: $[x, y)$, con $x \notin \mathbb{Q}$, por hipótese, e todos os da forma (x, y): se $z \in (x, y)$, tomando un irracional u tal que $a < u \leq z$, tense $z \in [u, b) \subset (a, b)$. Dedúcese que τ é máis fina que τ_u. Como a base dada para τ é un subconxunto da de Sorgenfrey, $\tau_{\mathcal{S}}$ é máis fina que τ. As dúas inclusións son estritas.
Intervalos pechados: $[x, y)$, con $y \notin \mathbb{Q}$, e todos os da forma $[x, y]$.

c) En $\mathbb{Q}$ as topoloxías τ e τ_u coinciden e $\tau_{\mathcal{S}}$ é estritamente máis fina.

d) Non é metrizábel, pois $(\mathbb{R}, \tau)$ é separábel ($\mathbb{Q}$ é denso), pero non é segundo enumerábel (mesmo argumento que para a topoloxía de Sorgenfrey).

e) A función non é continua en ningún punto irracional: se $x \notin \mathbb{Q}$, $[f(x), f(x+1))$ é unha veciñanza de $f(x)$. A súa imaxe recíproca é $[x, x+1)$, que non é unha veciñanza de x na topoloxía usual.

A función é continua en calquera punto de $\mathbb{Q}$. Unha veciñanza de $f(x)$ é $[2z-1, 2y-1)$, con $z \notin \mathbb{Q}$ e $z < x < y$. Logo

$$x \in (z, y) \subset f^{-1}([2z-1, 2y-1))$$

e, pois, $f^{-1}([2z-1, 2y-1))$ é unha veciñanza de x.

Exercicio 3.

É o exercicio 5.2 dos apuntamentos (páx. 64). Consideremos a bóla $B_V(x, r)$. Certamente, $2r$ é unha cota superior das distancias $\|z - y\|$ entre puntos da bóla. En efecto, se z e y están en $B_V(x, r)$, cúmprese

$$\|z - y\| \leq \|z - x\| + \|y - x\| < r + r = 2r\,.$$

Para concluír, temos que encontrar puntos da bóla que disten máis que calquera valor menor que $2r$ dado. Sexa $z \in V$ un vector de norma r. Os puntos $x + (n-1)z/n$ e $x - (n-1)z/n$ distan

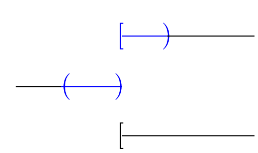
$$\|x + \frac{n-1}{n}\,z - x + \frac{n-1}{n}\,z\| \;=\; \frac{n-1}{n}\,2r,$$

e $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n}\,2r \;=\; 2r$.

Exercicio 5.

a) Tomamos un aberto básico de X, da forma $U = (x, y) \times \{t\}$, con $t = 1$ ou -1. $p(U)$ será aberto se $p^{-1}(p(U))$ é aberto. Hai tres casos:

$$\begin{aligned} x \geq 0, &\quad p^{-1}(p(U)) = U \\ y \leq 0, &\quad p^{-1}(p(U)) = (x, y) \times \{t, -t\} \\ x < 0 < y, &\quad p^{-1}(p(U)) = [(x, y) \times \{t\}] \cup [(x, 0) \times \{-t\}] \end{aligned}$$



$p((-1,1) \times \{1\})$

Conclúese que $p(U)$ é aberto, p é aberta.

Vexamos agora que non é pechada. Tomamos o pechado $[-1,1]\times\{1\}$. A súa imaxe non é un conxunto pechado, pois a imaxe recíproca é $[-1,1]\times\{1\}\cup[-1,0)\times\{-1\}$.

b) Por ser p aberta e sobrexectiva, a imaxe dunha base (ou dunha base local) será unha base (ou base local). Como X e primeiro e segundo enumerábel, o cociente, tamén.

c) O espazo Z non é Hausdorff, é o primeiro contraexemplo de cociente non Hausdorff que estudamos; os puntos $u=p(0,1)$ e $v=p(0,-1)$ do cociente non se poden separar por conxuntos abertos. Logo non é metrizábel.

d) Para estudar a continuidade de f, a compoñemos coa proxeccion, p. A composición é continua en todo X menos no punto $(0,-1)$. Logo f é continua en todos os puntos excepto no $v=p(0,-1)$, pois é continua no aberto $Z-\{v\}$.